Серия 15. Изогональное сопряжение относительно четырёхугольника

Теорема. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P. Тогда следующие условия эквивалентны:

(**1**) $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

(**2**) Проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA лежат на одной окружности.

(**3**) Существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно $ABCD$.

(**4**) Существует эллипс с фокусом в вершине P, вписанный в $ABCD$.

1. Докажите равносильность условий теоремы **(a)** (**1**) $\Longleftrightarrow$ (**2**); **(b)** (**2**) $\Longleftrightarrow$ (**3**).

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O.
(a) Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что прямая OA — биссектриса угла EOF.
(b) Пусть $\angle BAC = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает стороны AB и AC в точках U и V. Докажите, что прямая HA — биссектриса угла UHV.

3. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке I. На отрезках AI, CI отмечены точки X и Y так, что $\angle XBY = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle XDY = \frac{1}{2}\angle ADC$.

4. Внутри окружности Ω отмечена точка K. Рассматриваются все хорды AB окружности Ω такие, что $\angle AKB = 90°$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.

5. В описанном четырехугольнике $ABCD$ проведены пересекающиеся в точке P отрезки AM и DN, где точки M и N лежат на стороне BC. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту из вершины A в точке K. Точки P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Прямые PO и BC пересекаются в точке X. Окружность (BCM) пересекает прямую AB в точках B и Y. Докажите, что четырёхугольник $BXOY$ — вписанный.

7. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ASB, BSC, CSD и DSA лежат на одной окружности.