

Серия 14. Где лежит ортоцентр?

Прямая Штейнера. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Тогда точки, симметричные P относительно прямых AB , BC и AC , лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника ABC .

1. Пусть D — произвольная точка на стороне BC треугольника ABC . O_1, O_2, O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABD , ACD и ABC соответственно. Докажите, что (а) точки O_1, O_2, O_3 и A лежат на одной окружности, (б) ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой BC .
2. На отрезке AB треугольника ABC выбрана точка X . Докажите, что ортоцентр треугольника, образованного биссектрисами углов BAC , BXC и ABC лежит на прямой AB .
3. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ расположены так, что общие внутренние касательные к ω_1 и ω_2 , ω_2 и ω_3 и одна из внешних касательных к ω_1 и ω_3 пересекаются в одной точке. Докажите, что ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на другой общей касательной ω_1 и ω_3 .
4. Прямая ℓ пересекает прямые BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. O_1, O_2, O_3 — центры описанных окружностей треугольников AEF, BFD, CDE соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой ℓ .

Точка анти-Штейнера. Пусть прямая ℓ проходит через ортоцентр H треугольника ABC . Тогда прямые, симметричные ℓ относительно сторон треугольника, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

5. В треугольнике ABC провели диаметр AD . Через точку пересечения высот провели прямую, параллельную стороне BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F . Докажите, что (а) периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC ; (б) DEF — «бильярдная траектория» в фигуре, образованной лучами CA, CB и дугой ADB .
 6. Дан треугольник ABC . Прямая ℓ касается вписанной в него окружности. Обозначим через ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c прямые, симметричные ℓ относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC .
 7. **Теорема.** Прямая ℓ пересекает стороны острого угла ACB . Точки X_1 и X_2 симметричны произвольной точке X прямой ℓ относительно прямых CB и CA . Докажите, что все описанные окружности треугольников X_1X_2C проходят через одну точку.
 8. (**ЕГМО 2017.6**) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC G — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности. Точки, симметричные G и O относительно сторон BC, CA, AB обозначим G_1, G_2, G_3 , и O_1, O_2, O_3 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A$ и ABC пересекаются в одной точке.
 9. Точки X_1, X_2 и X_3 симметричны произвольной точке X относительно прямых CB, CA и AB соответственно. H — ортоцентр треугольника ABC . X не совпадает с H . Тогда описанные окружности треугольников $X_1X_2C, X_1X_3B, X_2X_3A$ и ABC пересекаются в одной точке.
 10. Дан треугольник ABC , O — его центр описанной окружности. Описанная окружность треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках A_1 и A_2 . Пусть ω_A — окружность, описанная около треугольника AA_1A_2 . Аналогично определяются ω_B и ω_C . Докажите, что эти три окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .¹
-
11. **Прямая Обера.** Даны четыре прямые в общем положении. Тогда ортоцентры четырех образованных ими треугольников лежат на одной прямой.
 12. H — точка пересечения высот AA' и BB' остроугольного треугольника ABC . Прямая, перпендикулярная AB , пересекает эти высоты в точках D и E , а сторону AB — в точке P . Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на отрезке CP .
 13. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1 . Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1 . Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C .

¹Докажите, что O — ортоцентр треугольника AA_1A_2 .