Серия 13. Разнобой.

1. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и отмечены центр O описанной окружности и ортоцентр H. Известно, что $\angle BAC = 45^\circ$. Докажите, что прямая OH проходит через середину отрезка B_1C_1.

2. Точки O, I — центр описанной окружности и инцентр равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Описанная окружность треугольника AIO пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L. Докажите, что прямая BL касается описанной окружности треугольника AIO.

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) нашлись такие точки P и Q соответственно, что $PC = PD$ и $QB = QA$. Докажите, что $\angle AQB = \angle DPC$.

4. Биссектрисы BB_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^\circ$) пересекаются в точке I, а точка M — середина B_1C_1. Докажите, что $IM \perp BC$.

5. На продолжениях сторон AB, AC остроугольного треугольника ABC за точки B, C отмечены точки P и Q соответственно так, что $PB = BC = CQ$. Докажите, что $PQ \perp OI_A$, где точка O — центр окружности (ABC), а точка I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины A.

6. Точка M — середина меньшей дуги BC окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. Прямые, проходящие через центр O окружности Ω, параллельные прямым MB и MC, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку O параллельно прямой KL, пересекает высоту треугольника ABC, опущенную из точки A, в точке T. Докажите, что $LT = OK$.

7. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC, восстановленные в вершинах A и C, пересекаются в точке P; касательные к описанной окружности треугольника BID, восстановленные в вершинах B и D, пересекаются в точке Q. Докажите, что точки P, I, Q лежат на одной прямой.