# Серия 9. Геометрические неравенства

1. В треугольнике длины двух высот соответственно равны 12 и 20. Докажите, что длина третьей высоты меньше 30.
2. Точка пересечения медиан треугольника $ABC$ обозначена через $G$. Выяснилось, что $\angle BGC < 90°$. Докажите, что $AB + AC > 3 \cdot BC$.
3. Биссектрисы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$. Какой из отрезков: $A_1I$, $B_1I$, $C_1I$ наибольший, если $\angle A > \angle B > \angle C$?
4. В четырёхугольнике $ABCD$ угол при вершине $A$ тупой, точка $F$ — середина стороны $BC$. Докажите, что $2 \cdot AF < BD + CD$.
5. Два круга касаются друг друга внешним образом и лежат внутри остроугольного треугольника $ABC$. Кроме того, первый круг касается отрезков $AB$ и $BC$, а второй круг касается отрезков $CA$ и $CB$. Докажите, что сумма радиусов этих кругов больше радиуса окружности, вписанной в треугольник $ABC$.
6. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $S$. Известно, что $\angle ASD = 120°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD$.
7. В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $BB_1$ и $CC_1$. Лучи $B_1C_1$ и $CB$ пересекаются в точке $X$. Докажите, что $3 \cdot \angle B_1XC < \angle ABC - \angle ACB$.
8. В остроугольном треугольнике $ABC$ сторона $BC$ — наименьшая; $B_1$, $C_1$ — произвольные точки на сторонах $AC$, $AB$ соответственно. Докажите, что длина ломанной $BB_1C_1C$ не меньше удвоенной длины отрезка $BC$.
9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ $AC$ делится диагональю $BD$ пополам, а угол при вершине $B$ равен $60°$. Докажите, что $AD + DC \geqslant BD$.