Разнобой

0. a) У четырёхугольника все стороны и углы равны между собой. Найдите его площадь.

b) Чему равен радиус круга, площадь которого равна периметру треугольника, все стороны и углы которого равны между собой?

1. Биссектриисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 повторно пересекают дуги AC и BC (не содержащие точек B и A соответственно) описанной окружности треугольника ABC в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

2. Пусть A_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно, а A' и C' — точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол B, с продолжениями сторон BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и BA перпендикулярны.

3. Дан треугольник ABC. Провели его биссектрисы AM и CN. Известно, что $\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а её диагонали — в точке Q. Известно, что описанная окружность треугольника PBC касается средней линии трапеции. Биссектриса угла P пересекает AD в точке K. Докажите, что $KQ \perp AD$.

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

6. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка O — центр его описанной окружности, а точка K — центр описанной окружности ω треугольника BCO. Высота треугольника ABC, проведенная из точки A, пересекает окружность ω в точке P. Прямая PK пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках E и F. Докажите, что один из отрезков EP и FP равен отрезку PA.

7. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и AB конкурентны.

8. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности треугольника CDA, касающейся стороны AC, лежат на одной прямой.

9. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причём точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырёхугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC.

10. В треугольнике ABC отметили точки H, I и O — ортоцентр, центр вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что $\angle BIH = 90^\circ \Leftrightarrow OI \parallel AC$.

11. Let ABC be a triangle, and let D be the point where the incircle meets side BC. Let J_b and J_c be the incentres of the triangles ABD and ACD, respectively. Prove that the circumcentre of the triangle AJ_bJ_c lies on the angle bisector of $\angle BAC$.

12. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB = CD$) вписана окружность. Пусть M — точка касания окружности со стороной CD, K — точка пересечения окружности с отрезком AM, L — точка пересечения окружности с отрезком BM. Вычислите величину $\dfrac{AM}{AK} + \dfrac{BM}{BL}$.