Серия 8. Проективные преобразования, часть 2

Теорема. Существует проективное преобразование, сохраняющее данную окружность ω и переводящее данную точку X **внутри** неё в её центр. Исключительной прямой этого преобразования служит поляра точки X относительно ω.

Наблюдение. На прямой, параллельной исключительной, сохраняются отношения отрезков.

1. Внутри окружности отмечена точка S, через которую проходят хорды AC, BD, $A'C'$, $B'D'$. Отрезки AB и $A'B'$ пересекаются в точке X, отрезки CD и $C'D'$ — в точке Y. Докажите, что точки X, Y, S коллинеарны.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Внутри окружности ω отмечена точка P. Отрезки AP, BP, CP пересекают ω в точках A', B', C'. Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке. *Обратите внимание, что поляра точки P может пересекать треугольник ABC.*

3. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке J. Прямая AA_1 второй раз пересекает окружность ω в точке T. Касательная к ω в точке T пересекает стороны AB, AC в точках P и Q. Отрезки PJ и QJ пересекают ω в точках X и Y. Докажите, что прямые PQ, XY, BC пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

4. (*Эта задача была на сборах, но попробуйте её переосмыслить в контексте проективных преобразований.*) Медиана AK треугольника ABC пересекает вписанную окружность ω в точках M и N. Прямые, проходящие через точки M и N параллельно прямой BC, вторично пересекают окружность ω в точках X и Y соответственно ($M \neq X$, $N \neq Y$). Прямы е AX и AY пересекают отрезок BC в точках P и Q. Докажите, что $BP = CQ$.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный прямой AC. Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC.

6. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке. Из точек A_1, B_1, C_1 проведены касательные ко вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Соответственные точки касания обозначены через A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — точка на меньшей дуге DE окружности такая, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $2KL = DE$.