

Серия 7. Проективные преобразования плоскости

Проективным преобразованием проективной плоскости Π , назовём преобразование, которое можно представить в виде композиции центральной проекции $f: \Pi \rightarrow \Pi'$ в пространстве на некоторую плоскость Π' и аффинного отображения $g: \Pi' \rightarrow \Pi$.

0. (*Теорема Паппа*) Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой; точки A_2, B_2, C_2 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой.
1. (*Теорема Дезарга*) Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой (считайте, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ невырожденные).
2. (*Теорема о трижды перспективных треугольниках*) Два треугольника назовём *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке. Известно, что треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны и треугольники ABC и $B'C'A'$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C'A'B'$ тоже перспективны.
3. На проективной плоскости даны две пронумерованные четвёрки точек общего положения. Докажите, что проективное преобразование, переводящее одну четвёрку в другую (а) существует; (б) единственно.
4. На недорисованной картине изображена железная дорога, проложенная через равнину и уходящая за горизонт, а также две рядом лежащие шпалы, параллельные линии горизонта. Как с помощью линейки определить, где надо рисовать третью шпалу?
5. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам.
6. На сторонах AC, AB, BC, BC, BC, BC треугольника ABC отмечены точки $B', C', A_A, A_P, A_B, A_C$ соответственно. Прямые BB', CC' пересекаются в точке P . Известно, что $AA_A, PA_P, B'A_B, C'A_C$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $AA_P, PA_A, B'A_C, C'A_B$ также пересекаются в одной точке.
7. Точка M_0 лежит на стороне AB четырёхугольника $ABCD$. Точка M_1 — проекция точки M_0 из точки D на прямую BC , точка M_2 — проекция точки M_1 из точки A на прямую CD , точка M_3 — проекция точки M_2 из точки B на прямую DA , точка M_4 — проекция точки M_3 из точки C на прямую AB и т. д. Докажите, что $M_{12} = M_0$.
8. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.