Серия 6. Разнобой

1. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y. Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY = DY$.

2. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих.

3. Биссектриса угла BAC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L и пересекает окружность (ABC) в точке M. Обозначим центры вневписанных окружностей треугольника ABC напротив вершин B и C через I_B и I_C соответственно. Докажите, что $I_C L \perp I_B M$.

4. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные треугольники: $A'BC$, $B'CA$ и $C'AB$ (вершины указаны в порядке соответствия). Докажите, что центроиды треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

5. Let ABC be a triangle, and B_0 the midpoint of its side CA. Denote by H_b the foot of the B-altitude of triangle ABC and by P and Q the orthogonal projections of the points A and C on the bisector of angle ABC. Then, the points H_b, B_0, P, Q lie on one circle.

6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90^\circ$. Площадь четырёхугольника $AMCD$ равна S. Докажите, что $AB \cdot CD \geqslant 2S$.