Серия 5. Обобщение теоремы Фейербаха

1. **(Известный факт).** Пусть прямая ℓ проходит через ортоцентр H треугольника ABC. Тогда прямые, симметричные ℓ относительно сторон треугольника пересекаются в одной точке P, лежащей на его описанной окружности. Прямая ℓ является прямой Штейнера точки P.

2. Отражения x, y, z прямой OP относительно средних линий $B'C', C'A'$ и $A'B'$ пересекаются в точке L на окружности Эйлера треугольника ABC, где O – центр описанной окружности, P – произвольная отличная от него точка.

Пусть X', Y', Z' – отражения точки L относительно средних линий $B'C', C'A'$ и $A'B'$, а H_a, H_b, H_c – основания соответствующих высот треугольника.

3. Докажите, что прямые AX', BY' и CZ' перпендикулярны OP.

4. Докажите, что $H_aL = AX'$, $H_bL = BY'$, $H_cL = CZ'$.

Обозначим через X, Y, Z основания перпендикуляров и P на стороны BC, CA, AB, а через X'', Y'', Z'' – отражения X, Y, Z относительно $B'C', C'A', A'B'$ соответственно.

5. Докажите, что точки A, P, Y, Z, X', X'' лежат на одной окружности.

Определим точки $A'' = B'C' \cap YZ, \quad B'' = C'A' \cap ZX, \quad C'' = A'B' \cap XY$.

6. Докажите, что **(a)** A'' лежит на окружности $(ZX'C')$; **(b)** $X'X'', YZ, B'C', LX$ пересекаются в точке A''.

7. Докажите, что точка L лежит на педальной окружности точки P.

8. Треугольники AH_bH_c, H_aBC, H_aH_bC подобны ABC. Возьмем в них прямые x', y', z', соответствующие прямой OP (как в подобных треугольниках). Докажите, что прямые x', y', z' проходят через L.

Обозначим через D, E и F ортоцентры треугольников AYX, BZX и CXY.

9. Докажите, что D, E и F соответствуют точке P в треугольниках AH_bH_c, H_aBC и H_aH_bC соответственно (как в подобных треугольниках).[1]

10. Докажите, что точки X, E, F, H_a и L лежат на одной окружности.

11. Нарисуйте картинку в случае $P = H$.

(a) Докажите, что если прямая ℓ проходит через центроид ABC, что $d(A, \ell) + d(B, \ell) + d(C, \ell) = 0$

(b) Докажите, что один из отрезков LH_a, LH_b, LH_c равен сумме двух других.

12. Нарисуйте картинку в случае $P = I$. Докажите, что точка Фейербаха F лежит на окружностях Эйлера треугольников AIB, BIC, CIA.

13. **(Aiyer's theorem).** Для любой точки P ее педальная окружность пересекается с окружностью Эйлера, причем угол между ними равен $90^\circ - \angle PAB - \angle PBC - \angle PCA$.

---

[1] Найдите точки, соответствующие точке O.