

Серия 4^{1/2}. Дополнительные задачи

1. Дан неравносторонний треугольник ABC . Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC , обозначим через I_A , а точку её касания с этой стороной — через A_1 . Аналогично определим точки I_B, I_C, B_1, C_1 . Докажите, что окружности (AI_AA_1) , (BI_BB_1) и (CI_CC_1) имеют две общие точки.
2. Биссектрисы внешних углов выпуклого четырехугольника $ABCD$ образуют четырехугольник $XYZT$ (биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке X , при вершинах B и C — в точке Y и т. д.). Докажите, что перпендикуляры из X на AB , из Y на BC , из Z на CD , из T на DA образуют описанный четырехугольник.
3. Let $ABCD$ be a quadrilateral, and let X, Y, Z, W be the points on the lines AB, BC, CD, DA which divide the sides AB, BC, CD, DA externally in the ratios of the squares of the adjacent sides, i. e. which satisfy

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\frac{DA^2}{BC^2}; \quad \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = -\frac{AB^2}{CD^2}; \quad \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} = -\frac{BC^2}{DA^2}; \quad \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = -\frac{CD^2}{AB^2}.$$

Then,

- (a) if $ABCD$ is noncyclic then the points X, Y, Z, W lie on one circle;
- (b) if $ABCD$ is cyclic then the points X, Y, Z, W lie on one line.