Серия 3. Отношение степеней и пучки окружностей

1. (**Основная лемма на сегодня**) Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается её в точке T. На окружности Ω выбраны произвольные точки A и B. Для каждой точки X плоскости обозначим длину отрезка касательной из X к ω через $\delta(X, \omega)$. Докажите, что $AT/BT = \delta(A, \omega)/\delta(B, \omega)$.

2. Хорды AC и BD окружности Ω пересекаются в точке K. Окружность ω касается отрезков AK и DK в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T. Прямая PQ пересекает отрезок AB в точке X. Докажите, что прямая TX — биссектриса угла ATB.

3. Окружность Ω проходит через вершины B и C неравнобедренного треугольника ABC и содержит внутри себя вершину A. Окружность ω касается отрезков AB и AC в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T. Прямые BC и PQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая TX проходит через середину дуги BC окружности Ω.

4. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q и касается окружности (ABC) внутренним образом в точке T. Отрезки AT и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что $\angle ABS = \angle ACS$.

5. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC с центром в точке I касается стороны BC в точке K. Некоторая окружность касается прямой BC в точке K и касается окружности (ABC) в точке T, причём точки A и T лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Докажите, что $\angle ATI = 90^\circ$.

6. **(a)** Окружность задана уравнением $f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ в декартовых координатах. Выразите через многочлен f значение степень точки с координатами (x, y) относительно этой окружности. **(b)** Даны две окружности. Докажите, что локусом точек плоскости с постоянными отношением степеней относительно этих окружностей служит окружность, прямая, точка или пустое множество.

Пучком окружностей называется семейство окружностей, заданных уравнениями $\lambda \cdot f(x, y) + \mu \cdot g(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — фиксированные многочлены вида $x^2 + y^2 + Ax + By + C$, а λ и μ пробегают всевозможные вещественные значения.

7. Дан угол и точка P внутри него. Рассматриваются всевозможные вписанные четырёхугольники $ABCD$ такие, что точки A и B лежат на одной стороне угла, точки C и D — на другой, а диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Докажите, что все описанные окружности таких четырёхугольников имеют общую радикальную ось.

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружность ω касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности Ω в точках P и Q. Прямая XY пересекает AC и BD в точках U и V. Докажите, что P, Q, U V лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD.