Серия 2. Разнобой

1. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. Его центры описанной и вписанной окружностей обозначены через O и I соответственно. Вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Докажите, что прямые AI и IK симметричны относительно прямой OI.

2. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка X. Точки P и Q — проекции точки X на прямые AB и AC. Точки M и N — середины отрезков BC и PQ. Докажите, что $\angle XNM = 90^\circ$.

3. Даны два ромба $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с равными сторонами. Известно, что точки A, C, A', C' лежат на одной окружности. Докажите, что точки B, D, B', D' также лежат на одной окружности.

4. На сторонах AB, AD вписанного в окружность Ω четырёхугольника $ABCD$ нашлись такие точки U и V соответственно, что $BU = CD$, $DV = CB$. Окружности Ω и (AUV) пересекаются в точках A и S. Докажите, что прямая CS делит диагональ BD пополам.

5. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Вневписанная окружность касается отрезка BC в точке N. Точка T — ближайшая к точке N точка пересечения прямой AN с вписанной окружностью. Прямые B_1C_1 и A_1T пересекаются в точке K. Докажите, что $AK \parallel BC$.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AD и отмечены центр описанной окружности O и ортоцентр H. На стороне AC отмечена точка X, такая что $\angle ODX = 90^\circ$. Докажите, что $\angle BCA = \angle DHX$.

7. В треугольнике ABC $(AB < AC)$ проведена биссектриса AL и медиана AM. Окружность (ALM) второй раз пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что прямая, соединяющая середину отрезка PQ с точкой M, параллельна прямой AL.