Матбой

1. Дан остроугольный треугольник ABC, A_1 — точка, диаметрально противоположная A. Отрезки AA_1 и BC пересекаются в точке A'. Перпендикуляр к прямой AA', восставленный в точке A', пересекает прямые AB и AC в точках M и N, соответственно. Докажите, что точки A, M, A_1 и N лежат на окружности с центром на высоте, проведенной из вершины A.

2. Даны n натуральных чисел x_1, x_2, …, x_n таких, что

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 2x_1\,.$$

Рассмотрим некоторое простое число p и такое натуральное число r, что произведение $x_1x_2\ldots x_n$ делится на p^r. Докажите, что частное не меньше $n!$.

3. Пусть $n \geqslant 4$. Для положительных чисел a_1, a_2, …, a_n докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n + a_1} < \left[\frac{n}{2}\right].$$

4. Петя выписал в ряд в некотором порядке числа $1, 2, \ldots, 2n$. Посчитав разности между соседними числами, он получил числа $1, 2, \ldots, 2n-1$ (в некотором порядке). Также оказалось, что если отнять из первого числа последнее, то получится n. Докажите, что на чётных местах стоят числа $1, 2, \ldots, n$ (в некотором порядке).

5. Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Прямая AM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_1. При каком положении точки M величина $\frac{MB\cdot MC}{MA_1}$ минимальна?

6. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами степени $n \geqslant 5$. Известно, что у него n различных целых корней: 0, α_2, α_3, …, α_n. Найдите все целые k такие, что $P(P(k)) = 0$.

7. Перед злой воспитательницей выстроились 2020 детсадовцев. У первого детсадовца 1 конфета, у второго — 2, …, у последнего — 2020. Раз в минуту воспитательница может выбрать нескольких детей и забрать у каждого из них одинаковое количество конфет. Через какое наименьшее число минут она сможет забрать у детей все конфеты?

8. Действительные числа a_1, a_2, …, a_{2n} таковы, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 0.$$

Найдите наименьшее возможное количество пар чисел $i > j$ таких, что сумма $a_i + a_j$ неотрицательна.