Геометрический разнобой

1. В угол B равностороннего треугольника вписана окружность ω_1, а в угол C — окружность ω_2 так, что ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке X. Обозначим точку касания ω_1 с AB через P, а ω_2 с AC — через Q. Найдите угол PXQ.

2. Вокруг треугольника ABC с углом B равным 60° описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки B_1, A_0, C_0 лежат на одной прямой.

3. Пусть ω_1 и ω_2 — две непересекающиеся окружности. Одна из общих внутренних касательных касается окружностей в точках A_1 и A_2, а одна из общих внешних касательных касается их в точках B_1 и B_2 (A_1 и B_1 лежат на ω_1, A_2 и B_2 — на ω_2). Оказалось, что $A_1B_2 \perp A_2B_1$. Докажите, что $A_1B_2 = A_2B_1$.

4. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Наружу треугольника ABE построены квадраты $ENMA$ и $EBQP$. Докажите, что отрезки ND и PC равны и перпендикулярны.

5. Пусть B_0 — середина стороны AC треугольника ABC. Проведём из середины отрезка AB_0 перпендикуляр к стороне BC, а из середины отрезка B_0C — перпендикуляр к стороне AB. Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через B'. Аналогично определим точки A' и C'. Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

6. Окружности ω_1, ω_2, ω_3 с радиусами 1, 2, 3 соответственно попарно касаются друг друга внешним образом. Обозначим точки касания ω_1 с ω_2 и ω_3 через A и B соответственно. Общая внешняя касательная ω_2 и ω_3, не пересекающая ω_1, касается ω_2 в точке C, а ω_3 — в точке D. Найдите угол между AC и BD.

7. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ верны равенства
$$\angle A = \angle C = \angle E, \quad \angle B = \angle D = \angle F.$$
Кроме того, биссектрисы углов A, C, E пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектрисы углов B, D, F также пересекаются в одной точке.