

Алгебраический разнобой

1. Петя и Вася придумали десять квадратных трехчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трехчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?
2. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.
3. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, и каждый член имеет вид $1/k$, где k — натуральное.
4. Найти минимальное значение выражения $2a^2 - 8ab + 17b^2 - 16a - 4b + 2088$.
5. Найдите наибольшее значение выражения $x^2y - y^2x$, если $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$.
6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17; \\ x + y = 3. \end{cases}$$

7. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?