Биекции и равномощности

Пусть X, Y — произвольные множества.

Определение. Функция $f\colon X \to Y$ называется *сюръекцией,* если

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y.$$

Или, по-простому, каждый элемент множества Y соответствует какому-то (хотя бы одному) элементу из X.

Определение. Функция $f\colon X \to Y$ называется *инъекцией,* если

$$\forall x_1, x_2 \in X\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Или, по-простому, функция f не "склеивает" элементы, различные иксы переходят в различные игреки.

Определение. Функция $f\colon X \to Y$ называется *биекцией,* f одновременно и инъекция, и сюръекция. Биекция разбивает элементы множеств X и Y на пары. У любой биекции есть обратная функция (и наоборот, если у некоторой функции f есть обратная, то f — биекция). Другое название биекции — *взаимно однозначное отображение.*

Определение. Множества X и Y называются *равномощными,* если между ними существует биекция. Говоря неформально, множества равномощны, если в них "как будто поровну" элементов. Для конечных множеств это свойство тривиальное, а для бесконечных — наоборот, весьма непростое. Сегодня нас будут интересовать только биекции и равномощности.

Пример. Докажем, что множество натуральных чисел и множество натуральных чётных чисел равномощны. Для этого достаточно построить биекцию между этими множествами. Биекция такая: натуральному числу n поставим в соответствие чётное натуральное число $2n$ (то есть $f(n) = 2n$). Несложно видеть, что это действительно является биекцией.

1. Докажите, что отрезок $[0,1]$ равномощен отрезку $[0,2]$.

2. Докажите, что множество внутренних точек квадрата равномощно множеству внутренних точек круга.

3. Докажите, что интервал равномощен прямой.

4. Докажите, что полуинтервал $[0,1)$ равномощен отрезку $[0,1]$.

5. Докажите, что отрезок равномощен квадрату.

Определение. Множество называется *континуальным,* если оно равномощно интервалу $(0,1)$.

6. Докажите, что множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ равномощны.

7. Докажите, что множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$ равномощны.

8. Докажите, что множество всех конечных последовательностей цифр 0 и 1 и множество $\mathbb{N}$ равномощны.

9. Пусть $\mathbb{A}$ — множество корней всех многочленов с целыми коэффициентами. Докажите, что множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{N}$ равномощны.

Определение. Множество называется *счетным,* если оно равномощно $\mathbb{N}$.

10. Докажите, что множества $(0,1)$ и $\mathbb{N}$ неравномощны.

11. Пусть X — произвольное множество. Множество всех подмножеств X обозначают 2^X. Докажите, что X и 2^X никогда не могут быть равномощны.

12. Докажите, что множество $2^{\mathbb{N}}$ континуально.

13. Докажите, что на прямой нельзя расположить более чем счетное множество попарно непересекающихся интервалов.

14. Назовем *восьмеркой* пару касающихся внешним образом окружностей. Докажите, что на плоскости нельзя расположить более чем счетное множество попарно непересекающихся восьмерок.

15. Назовем *буквой* T пару отрезков, имеющих единственную общую точку, при этом эта точка является концом одного отрезка и не является концом другого. Докажите, что на плоскости нельзя расположить более чем счетное множество попарно непересекающихся букв T.