

Комбинаторный разбой

1. Нарисуйте на плоскости 6 точек так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.
2. Назовем набор различных натуральных чисел от 1 до 9 четным, если сумма цифр в нем четная. Сколько существует четных наборов?
3. В коробке лежат карандаши 10 различных цветов, 10 различных размеров, 10 различных производителей. При этом для любой пары разных свойств (например, данного цвета и данного производителя), найдется хотя бы один карандаш, обладающий этими свойствами. Верно ли, что всегда можно выбрать четыре карандаша так, что их цвета, размеры и производители попарно различны.
4. На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т. е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?
5. Дан пустой граф на $n > 2$ вершинах и натуральное $k < 4$. Леша и Саша играют в следующую игру. Каждым своим ходом Леша выбирает три вершины и проводит между ними все ребра, которых еще нет. Саша каждым своим ходом стирает любые k ребер графа. Первым ходит Леша. Леша выигрывает, если после очередного хода Саши граф окажется связным. При каких k Саша сможет ему помешать?
6. Международная комиссия состоит из n человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Какое минимальное количество замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее t членов комиссии?
7. Таблица 4×4 разрезана невидимыми разрезами на доминошки. За одну операцию разрешается назвать пару соседних по стороне клеток таблицы и узнать, присутствует ли эта доминошка в разрезании. За какое наименьшее число операций можно полностью восстановить исходное разрезание?