Гармонический четырёхугольник

Определение. Четырёхугольник называется *гармоническим*, если он вписан и произведения его противоположных сторон равны.

1. Докажите, что следующие свойства вписанного четырёхугольника $ABCD$ равносильны.
(a) $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.
(b) AC — симедиана треугольника ABD (кстати, BD — тоже симедиана, но треугольника ABC).
(c) Если M — середина AC, то $\angle BMC = \angle BAD$.
(d) Если M — середина AC, то $\angle BMC = \angle DMC$. (Ничего, кстати, не напоминает? См. задачу 4 из прошлого листика.)

2. В окружности ω провели две параллельных хорды AB и CD. E — точка пересечения ω и прямой, проходящей через C и середину AB. Пусть F — середина DE. Докажите, что $\angle AFE = \angle BFE$.

3. **(a)** Высота и симедиана, проведённые из вершины A треугольника ABC, пересекают описанную окружность в точках A_1 и S. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle MSA_1 = 90°$.
(b) Высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H, X — проекция H на медиану AM. Докажите, что точки B, H, X, C лежат на одной окружности.
(c) Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке A'. Докажите, что точки A', A_1, S лежат на одной прямой.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM. На отрезке BM нашлась точка P такая, что биссектрисы углов BAP и BCP пересеклись в точке Q на BM. Докажите, что $\angle AQC = 90°$.

5. Через вершины B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая ℓ, перпендикулярная BC. Две окружности, проходящие через точки C и D, касаются прямой ℓ в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины отрезка AB под равными углами.