Симедиана

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. **(a)** В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что симедиана, проведённая из вершины A, делит отрезок B_1C_1 пополам.
(b) Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C. Докажите, что симедиана, проведённая из вершины A, проходит через точку P. (*Для этого рассмотрите точки X и Y на лучах AB и AC такие, что $PB = PX = PY$.*)

2. **(a)** Пусть AK — симедиана треугольника ABC (точка K лежит на стороне BC). Докажите, что
$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\angle BAK}{\sin\angle CAK} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}.$$
(b) Докажите, что прямая, содержащую симедиану, проведённую из вершины A — это ГМТ внутри угла A таких, что расстояния от них до прямых AB и AC относятся как AB/AC. Выведите отсюда утверждение задачи 1b.

3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Окружность, построенная на BO как на диаметре, вторично пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке $S \neq O$. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

4. Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABX = \angle CAX$, а также $\angle ACX = \angle BAX$. Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC.

5. Даны окружность, её хорда AB и середина C_0 меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности, проведённая из точки C, пересекает касательные, проведённые из точек A и B, в точках X и Y соответственно. Прямые C_0X и C_0Y пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

6. Внутри равнобедренного треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle PBC = \angle PCA$. Пусть M — середина основания BC. Докажите, что $\angle BPM + \angle CPA = 180°$.

Определение. Из задачи 2a следует, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка нызвается *точкой Лемуана.*

7. **(a)** Через точку X внутри треугольника провели три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X — точка Лемуана.
(b) Через точку L провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что их точки пересечения со сторонами треугольника лежат на одной окружности.
(c) Докажите, что центр окружности из предыдущего пункта является серединой отрезка OL, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.