

Последовательный разнбой 2

- Докажите, что для натурального $n > 1$ выполнены неравенства
 - $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$;
 - $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$.
- (а) Существует ли такое C , что для всех натуральных n выполнено неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < C?$$

- Для всех n докажите неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

- Последовательность положительных чисел $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $x_n^2 \leq x_n - x_{n+1}$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что $x_n < 1/n$.
- Ремонтно-строительная контора «Рога и копыта» взялась построить дорогу длиной 100 км из Арбата в Черноморск. План строительства таков: за первый месяц будет построен 1 км дороги, а далее, если к началу какого-то месяца уже готово A км, то за этот месяц будет построено ещё $\frac{1}{A^{10}}$ км дороги. Построит ли контора дорогу?
- Найдите сумму

$$\left[\frac{2}{3} \right] + \left[\frac{2^2}{3} \right] + \left[\frac{2^3}{3} \right] + \dots + \left[\frac{2^{100}}{3} \right].$$

- Докажите неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2020}\right) < 45.$$

- Последовательность действительных чисел x_1, x_2, \dots такова, что $x_1 = 1/2$ и $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ для всех n . Найдите целую часть суммы

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{2020} + 1}.$$