

Информация

Как вы могли убедиться в недавнем листике про взвешивания, делать верхние оценки в подобных задачах (то есть придумывать алгоритм) бывает проще, чем доказывать нижние оценки (то есть доказывать, что меньшим числом взвешиваний обойтись не получится). Сегодня мы поговорим об одном методе делать нижние оценки.

Давайте рассмотрим такую задачу:

Витя загадал натуральное число от 1 до 16. Лёша может задавать Вите вопросы, на которые Витя будет отвечать «Да» или «Нет». За какое наименьшее число вопросов Лёша сможет угадать загаданное Витей число?

Несложно привести алгоритм, когда Лёше хватит четырёх вопросов: каждым вопросом он будет уменьшать количество «подозрительных чисел» (то есть чисел, которые могут быть загаданы Витей) в два раза. Первый вопрос: «Правда ли, что твоё число больше 8?». Вне зависимости от ответа количество «подозрительных» чисел станет равно 8. Следующим вопросом Лёша опять сократит их количество вдвое, потом опять вдвое, а из двух последним вопросом найдёт загаданное.

Покажем, что тремя вопросами обойтись не получится. Заметим, что любой вопрос Лёши можно переформулировать так: «Есть ли загаданное число в данном подмножестве чисел?». То есть каждым ходом Лёша разбивает все числа на два подмножества, а в ответ узнаёт, в каком из подмножеств содержится загаданное число. Пусть ему каждый раз не везёт и он узнаёт, что число находится в большем из подмножеств. Тогда после первого вопроса у него останется не меньше 8 «подозрительных» чисел, после второго — не меньше 4, после третьего — не меньше 2.

Способ рассуждать немного по-другому. Задав 3 вопроса, мы получим 2^3 различных последовательностей ответов. Каждое число соответствует какой-то последовательности ответов (то есть число будет загаданным, при этой последовательности ответов). Но тогда какой-то последовательности ответов будет соответствовать более одного числа, то есть если последовательность будет именно такой, то какое из этих чисел загадано, мы не узнаем.

- (а) В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает «Да» или «Нет». Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

(б) В англо-русском словаре 80 страниц, на каждой из них по 50 слов. Витя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Лёша угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?
- Саша загадала одно чётное и одно нечётное число от 1 до 10. Витя хочет угадать эти числа, задавая вопросы, на которые Саша отвечает «Да» или «Нет». За какое наименьшее число вопросов Витя может справиться с этой задачей?
- Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.

(а) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?

(б) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?
- Имеется 64 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 64 золотых монет, они также упорядочены по весу. Известно, что все монеты по весу различны. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти монету, занимающую 64 место по весу?

Помимо этих задач, вернитесь и порешайте задачи 3, 6, 7 и 8 из листика «Взвешивания».