

Геометрия масс – 2

Пусть фиксирован треугольник ABC . *Барицентрическими координатами* точки X называется тройка чисел $(m_A : m_B : m_C)$ такая, что точка X является центром масс системы $(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)$. Очевидно, что эти координаты для фиксированной точки X определены с точностью до пропорциональности, то есть их можно домножить на любое ненулевое число, и они останутся барицентрическими координатами той же точки.

1. Какие массы надо положить в вершины треугольника со сторонами a, b, c и углами α, β, γ , чтобы центр масс попал в
 - (а) центр вневписанной окружности?
 - (б) ортоцентр? центр описанной окружности?
 - (с) точку Жергонна (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности со сторонами)? точку Нагеля (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей со сторонами)?
2. Дан треугольник ABC и точки X, Y, Z . Докажите, что X, Y, Z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда у этих точек можно выбрать барицентрические координаты таким образом, что

$$X(x_1 : x_2 : x_3), \quad Y(y_1 : y_2 : y_3), \quad Z(x_1 + y_1 : x_2 + y_2 : x_3 + y_3).$$

3. (*Прямая Нагеля*) Докажите, что центр вписанной окружности I , точка пересечения медиан M и точка Нагеля N лежат на одной прямой, причём $NM = 2MI$.
4. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке P . Докажите, что точка I лежит на прямой KP .

Далее идут задачи, не обязательно связанные с барицентрическими координатами.

5. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AKL лежит на диагонали BD .
6. Внутри окружности находится некоторая точка A . Через A провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырёх точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора этих двух прямых.
7. (а) В точках касания описанного n -угольника со своей вписанной окружностью расставлены массы, равные длине соответствующим сторонам. Докажите, что центр масс рассматриваемой системы совпадает с центром вписанной окружности.
(б) (*Теорема Ньютона.*) Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины его диагоналей.
8. На сторонах AB, AC, BC треугольника ABC выбраны точки C_1, B_1, A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X . Оказалось, что получившиеся четырёхугольники являются описанными. Пусть a и b — радиусы вписанных окружностей треугольников AXC_1 и AXB_1 соответственно, c и d — радиусы вписанных окружностей четырёхугольников BA_1XC_1 и CA_1XB_1 соответственно. Докажите, что $1/a + 1/d = 1/b + 1/c$.