[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Трещёв

[2019–2020] группа: 9–2 *02 апреля 2020 г.*

Геометрия масс

Пусть дана система точек $A_1, \ldots, A_n$, каждой точке A_i соответствует число m_i. Пусть $\sum m_i \neq 0$. Тогда *центром масс* данной системы точек называется такая точка X, что $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\sum m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum m_i}$. Здесь O — произвольная точка.

Докажем **Корректность определения** центра масс — то, что X на самом деле не зависит от выбора O.

Пусть для двух произвольных точек O и O' выполнено

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum m_i} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{O'X'} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{O'A_i}}{\sum m_i}.$$

Докажем, что $X = X'$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O'X'} &= \left(\sum m_i \overrightarrow{O'A_i}\right) / \sum m_i \\
&= \left(\sum m_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i})\right) / \sum m_i \\
&= \left(\sum m_i \overrightarrow{O'O}\right) / \sum m_i + \left(\sum m_i \overrightarrow{OA_i}\right) / \sum m_i \\
&= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{O'X},
\end{aligned}$$

что и означает, что $X = X'$.

В некоторых задачах центр масс удобно искать, удачно выбирая точку O. В других помогают **Правило рычага** и **Теорема о группировке**.

Правило рычага. Пусть в точках A_1 и A_2 расположены массы m_1 и m_2. Тогда центр масс такой системы расположен в такой точке X на прямой A_1A_2, что $m_1\overrightarrow{XA_1} = -m_2\overrightarrow{XA_1}$. (Произведения масс на плечи равны, как сказали бы физики).

Теорема о группировке. Пусть даны две системы масс $\{(A_1, m_1), \ldots, (A_k, m_k)\}$ и $\{(B_1, n_1), \ldots, (B_l, n_l)\}$. Пусть $\sum m_i = M \neq 0$, $\sum n_i = N \neq 0$, $M + N \neq 0$. Пусть X_A и X_B — центры масс наших систем. Тогда центр масс объединенной системы совпадает с центром масс системы $\{(X_A, M), (X_B, N)\}$.

В задачах бывает полезно располагать две или более масс в одной и той же точке, рассматривать отрицательные массы.

1. В вершинах треугольника расположены массы $1, 1, -1$. Найти центр масс системы. *Можно пользоваться результатами задач 2 и 3.*

2. Доказать правило рычага.

3. Доказать теорему о группировке.

4. Точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$. Докажите, что точка пересечения PR и QS лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей AC и BD.

5. Дан треугольник ABC и точка P внутри него. Чевианы AA', BB', CC' проходят через точку P. Пусть $AC' : C'B = p$, $BA' : A'C = q$, $CB' : B'A = r$. Расположите в вершинах треугольника подходящие массы и докажите теорему Чевы: $pqr = 1$. *Задумайтесь о том, что если точка P снаружи треугольника, то ничего не меняется.*

6. Дан треугольник ABC. Какие массы нужно расположить в его вершинах, чтобы центр масс совпал с точкой пересечения биссектрис?

7. В треугольнике ABC чевианы AA', BB', CC' пересекаются в точке K. L — точка пересечения $A'C'$ и BK. Известно, что $BC' : C'A = p$, $BA' : A'C = q$. Найдите $BL : LK$.

8. **Построение Брианшона**. Даны отрезки AA_0 и $BB_0 \parallel AA_0$ (см. рисунок). Строим последовательно: точку V — пересечение AB и A_0B_0, $C_1 = AB_0 \cap A_0B$, A_1, $C_2 = AB_0 \cap A_1B$, A_2, потом A_3 и т. д. Докажите, что $AA_n : A_nA_0 = 1 : n$.

9. **Теорема о трех параллелограммах**. Докажите, что точки M, N и C на рисунке лежат на одной прямой (M — произвольная точка внутри параллелограмма $ABCD$, $a \parallel AB$, $b \parallel BC$).