

Цешки и не только

В данном листочке вам потребуется вспомнить про бином Ньютона и про комплексные числа.

Пример. Вычислите сумму $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots$

Решение. Воспользуемся формулой

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots$$

Подставив в данное равенство $a = b = 1$, получаем

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots = 2^n.$$

1. Вычислите сумму $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots$
2. Вычислите сумму $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$
3. Вычислите сумму $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$
4. Вычислите сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots$
5. Докажите равенства

$$\frac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi} = 1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C_n^4 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots;$$

$$\frac{\sin n\varphi}{\cos^n \varphi} = C_n^1 \operatorname{tg} \varphi - C_n^3 \operatorname{tg}^3 \varphi + C_n^5 \operatorname{tg}^5 \varphi - \dots$$

6. Докажите равенство

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \dots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}} \sin \frac{n\pi}{6}.$$

7. Вычислите сумму $1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \dots$ ($|a| < 1$).
8. Докажите равенство

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

9. Вычислите суммы $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$ и $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$