

Подвешивание за вершину

Иногда граф бывает удобно «подвесить за вершину». Сначала берём корень (то есть вершину, за которую подвешиваем) и определяем его в нулевой (верхний) ярус. Потом все вершины, смежные с корнем, определяем в первый ярус. Потом все вершины, смежные хотя бы с одной вершиной первого яруса, но не вошедшие в нулевой и первый ярус, относим во второй ярус и т. д., пока все вершины не будут определены в свой ярус.

1. В стране некоторые города соединены авиалиниями, причем из города A в город B нельзя попасть, сделав менее 10 пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из A в B будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 авиакомпаниям.
2. Степень всех вершин графа не меньше n , причем в нем нет циклов длины 3, 4, 5. Докажите, что в нем найдутся $n^2 - n$ вершин, никакие две из которых не смежны.
3. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нем имеют чётную длину.
4. На кружок ходят 53 ученика. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.
5. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более 196 перелётов.
6. В стране 120 городов, некоторые пары городов соединены дорогой. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.
7. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогой, причём из каждого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.
8. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)