

О некоторых простых числах

1. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 101$. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть равно 0.
2. Дана квадратная таблица 25×25 . В каждой клетке этой таблицы записано одно из чисел $1, 2, \dots, 25$. При этом в клетках, симметричных относительно главной диагонали, записаны равные числа и никакие два числа в одной строке или в одном столбце не совпадают. Докажите, что все числа, стоящие на главной диагонали, попарно различны.
3. Существует ли выпуклый 13-угольник, который можно разрезать параллелограммы? А невыпуклый?
4. Каждое из чисел x_1, x_2, \dots, x_n равно либо 1, либо -1 , причём

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0.$$

Докажите, что n делится на 4.

5. Дана доска 15×15 . Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.
6. На клетчатом листе бумаги нарисованы несколько прямоугольников, их стороны идут по сторонам клеток. Каждый прямоугольник состоит из нечётного числа клеток, и никакие два прямоугольника не содержат общих клеток. Докажите, что эти прямоугольники можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы у прямоугольников одного цвета не было общих точек границы.
7. Дан выпуклый пятиугольник с вершинами на целочисленной решетке. Докажите, что существует шестая точка решетки, расположенная
 - (а) внутри пятиугольника либо на его стороне;
 - (б) строго внутри пятиугольника.
8. Шерлок Холмс, доктор Ватсон и Профессор Мориарти играют в следующую игру. Профессор Мориарти кладет на каждую клетку шахматной доски по одному шиллингу, по своему усмотрению вверх или вниз гербом. Затем он указывает на одну из клеток доски. Доктор Ватсон видит, на какую клетку указал Мориарти. Ватсон может перевернуть не более одного шиллинга. После этого в комнату входит Шерлок Холмс, смотрит на доску и пытается угадать, на какую клетку указывал Мориарти. Как Холмс и Ватсон могут договориться, чтобы гарантированно выигрывать?