Комплексные координаты 2

1. *(Теорема Ньютона)* Докажите, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей этого четырёхугольника.

2. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.
(a) *(Прямая Симсона)* Докажите, что основания перпендикуляров из точки P на прямые, содержащие стороны треугольника, лежат на одной прямой.
(b) Докажите, что точки, симметричные P относительно прямых, содержащих стороны треугольника, лежат на одной прямой вместе с ортоцентром треугольника ABC.

3. Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырехугольника, лежат на одной прямой.

4. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A_1. Касательная к ω, восстановленная в точке A_1, пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O — середина PQ.

5. На окружности ω отмечены две точки A и B. Касательные к ω к точкам A и B пересекаются в точке S. Хорда XY окружности ω проходит через середину M отрезка AB. Докажите, что $\angle XSM = \angle MSY$.

Общие формулы.

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$.
- A, B, C на одной прямой $\Leftrightarrow \frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$.
- $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}$.
- A, B, C, D на одной окружности или прямой $\Leftrightarrow \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}$.
- M — точка пересечения медиан треугольника ABC $\Leftrightarrow m = \frac{a+b+c}{3}$.

Формулы для работы с единичной окружностью Ω.

- $Z \in \Omega \Leftrightarrow z\overline{z} = 1$.
- $AB \perp CD$ $(A, B, C, D \in \Omega) \Leftrightarrow ab + cd = 0$.
- $Z \in AB$ $(A, B \in \Omega) \Leftrightarrow z + ab\overline{z} = a + b$.
- ZA касается Ω $(A \in \Omega) \Leftrightarrow z + a^2\overline{z} = 2a$.
- Z — точка пересечения касательных в точках A и $B \Leftrightarrow z = \frac{2ab}{a+b}$.
- K — основание перпендикуляра из Z на $AB \Leftrightarrow k = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.
- H — ортоцентр ABC $(A, B, C \in \Omega) \Leftrightarrow h = a + b + c$.