Комплексные координаты

1. **(a)** Докажите, что z — действительное число тогда и только тогда, когда $z = \overline{z}$.
(b) Докажите, что z — чисто мнимое число тогда и только тогда, когда $z = -\overline{z}$.

2. Докажите, что $AB^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$.

3. **(a)** Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$.
(b) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
(c) Докажите, что если A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z} = 1$, то прямая AB задаётся уравнением $z + ab\overline{z} = a + b$.

4. **(a)** Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$.
(b) Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности $z\overline{z} = 1$. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда, когда $ab + cd = 0$.

5. **(a)** Докажите, что касательная к единичной окружности $z\overline{z} = 1$ в точке A, лежащей на ней, задётся уравнением $z + a^2\,\overline{z} = 2a$.
(b) Докажите, что касательные к окружности $z\overline{z} = 1$ в точках A и B, лежащих на ней, пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

6. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}$. (Это выражение называется *двойным отношением* чисел a, b, c, d.)

7. Точки A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z} = 1$. Точка K — основание перпендикуляра из произвольной точки Z на прямую AB. Докажите, что $k = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

8. Точки A, B, C лежат на единичной окружности. Найдите координаты точки пересечения медиан и точки пересечения высот треугольника ABC.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *5 марта 2020 г.*

Комплексные координаты

1. **(a)** Докажите, что z — действительное число тогда и только тогда, когда $z = \overline{z}$.
(b) Докажите, что z — чисто мнимое число тогда и только тогда, когда $z = -\overline{z}$.

2. Докажите, что $AB^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$.

3. **(a)** Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$.
(b) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
(c) Докажите, что если A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z} = 1$, то прямая AB задаётся уравнением $z + ab\overline{z} = a + b$.

4. **(a)** Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$.
(b) Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности $z\overline{z} = 1$. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда, когда $ab + cd = 0$.

5. **(a)** Докажите, что касательная к единичной окружности $z\overline{z} = 1$ в точке A, лежащей на ней, задётся уравнением $z + a^2\,\overline{z} = 2a$.
(b) Докажите, что касательные к окружности $z\overline{z} = 1$ в точках A и B, лежащих на ней, пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

6. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}$. (Это выражение называется *двойным отношением* чисел a, b, c, d.)

7. Точки A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z} = 1$. Точка K — основание перпендикуляра из произвольной точки Z на прямую AB. Докажите, что $k = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

8. Точки A, B, C лежат на единичной окружности. Найдите координаты точки пересечения медиан и точки пересечения высот треугольника ABC.