Комплексные числа. Продолжение

Каждому комплексному числу $z = a+ib$ можно сопоставить точку (a, b) декартовой плоскости, а также вектор (a, b).

Каждое комплексное число $z \neq 0$ представимо в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где число r положительно. При этом r называется *модулем* числа и определяется однозначно (обозначается $|z|$); φ называется *аргументом* числа и определяется с точностью до кратного 2π.

1. **(a)** Докажите, что $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ для любых z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Два целых числа представимы в виде суммы двух квадратов целых чисел. Докажите, что их произведение тоже представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

2. **(a)** Докажите, что при умножении (делении) двух комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются).
(b) **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Упражнение. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

3. Вычислите
(a) $(1+\sqrt{3}i)^{2020}$; **(b)** $\sqrt{1+i}$.

4. Комплексные корни уравнения $z^n - 1 = 0$ называются корнями n-ой степени из единицы.
(a) Как эти числа расположены на комплексной плоскости?
(b) Найдите сумму, произведение и сумму квадратов этих чисел.

5. Представьте многочлен $1 + z + \ldots + z^{11}$ в виде произведения многочленов не выше второй степени с вещественными коэффициентами.

6. Решите уравнение:
$$(z+i)^{2020} + (z-i)^{2020} = 0.$$

7. Вычислите сумму $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha$.

8. В окружность вписан правильный n-угольник.
(a) Найдите сумму квадратов всех его сторон и диагоналей.
(b) Найдите произведение длин всех его сторон и диагоналей.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *20 февраля 2020 г.*

Комплексные числа. Продолжение

Каждому комплексному числу $z = a+ib$ можно сопоставить точку (a, b) декартовой плоскости, а также вектор (a, b).

Каждое комплексное число $z \neq 0$ представимо в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где число r положительно. При этом r называется *модулем* числа и определяется однозначно (обозначается $|z|$); φ называется *аргументом* числа и определяется с точностью до кратного 2π.

1. **(a)** Докажите, что $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ для любых z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Два целых числа представимы в виде суммы двух квадратов целых чисел. Докажите, что их произведение тоже представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

2. **(a)** Докажите, что при умножении (делении) двух комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются).
(b) **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Упражнение. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

3. Вычислите
(a) $(1+\sqrt{3}i)^{2020}$; **(b)** $\sqrt{1+i}$.

4. Комплексные корни уравнения $z^n - 1 = 0$ называются корнями n-ой степени из единицы.
(a) Как эти числа расположены на комплексной плоскости?
(b) Найдите сумму, произведение и сумму квадратов этих чисел.

5. Представьте многочлен $1 + z + \ldots + z^{11}$ в виде произведения многочленов не выше второй степени с вещественными коэффициентами.

6. Решите уравнение:
$$(z+i)^{2020} + (z-i)^{2020} = 0.$$

7. Вычислите сумму $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha$.

8. В окружность вписан правильный n-угольник.
(a) Найдите сумму квадратов всех его сторон и диагоналей.
(b) Найдите произведение длин всех его сторон и диагоналей.