Комплексные числа. Начало

Определение. *Комплексным* числом называется формальная запись вида $a+bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2=-1$, a, $b\in\mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0+0i$.

1. Пусть x, $y\in\mathbb{C}$. Докажите, что
(a) $x+y$, $x-y$, $xy\in\mathbb{C}$;
(b) если $y\neq 0$, то $x/y\in\mathbb{C}$.

2. Какому комплексному числу равно значение выражения $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$?

3. Решите в комплексных числах уравнения:
(a) $z^2-(4+i)z+10+2i=0$;
(b) $z^3-1=0$.

4. Докажите, что для любого комплексного числа z найдется такое комплексное t, что $t^2=z$. Сколько существует таких t?

Определение. Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

Упражнение. Осознайте свойства сопряжения: $\overline{z+t}=\overline{z}+\overline{t}$; $\overline{zt}=\overline{z}\overline{t}$; $\overline{\overline{z}}=z$.

5. Найдите все комплексные числа, сопряженные
(a) своему квадрату; **(b)** своему кубу.

6. **(a)** Пусть x — корень квадратного трехчлена с действительными коэффициентами. Докажите, что $\overline{x}$ также является корнем этого уравнения.
(b) Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $f(x)=0$, то $f(\overline{x})=0$.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен (от одной переменной) ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень.

Следствие. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в нём ровно n комплексных корней, с учётом их кратности.

7. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами существует набор многочленов с действительными коэффициентами $Q_i(x)$ степени не выше 2 такой, что $P(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot\ldots\cdot Q_n(x)$.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[2019–2020] группа: 9–2 17 февраля 2020 г.

Комплексные числа. Начало

Определение. Комплексным числом называется формальная запись вида $a+bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2=-1$, a, $b\in\mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0+0i$.

1. Пусть x, $y\in\mathbb{C}$. Докажите, что
(a) $x+y$, $x-y$, $xy\in\mathbb{C}$;
(b) если $y\neq 0$, то $x/y\in\mathbb{C}$.

2. Какому комплексному числу равно значение выражения $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$?

3. Решите в комплексных числах уравнения:
(a) $z^2-(4+i)z+10+2i=0$;
(b) $z^3-1=0$.

4. Докажите, что для любого комплексного числа z найдется такое комплексное t, что $t^2=z$. Сколько существует таких t?

Определение. Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются сопряженными. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

Упражнение. Осознайте свойства сопряжения: $\overline{z+t}=\overline{z}+\overline{t}$; $\overline{zt}=\overline{z}\overline{t}$; $\overline{\overline{z}}=z$.

5. Найдите все комплексные числа, сопряженные
(a) своему квадрату; (b) своему кубу.

6. (a) Пусть x — корень квадратного трехчлена с действительными коэффициентами. Докажите, что $\overline{x}$ также является корнем этого уравнения.
(b) Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $f(x)=0$, то $f(\overline{x})=0$.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен (от одной переменной) ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень.

Следствие. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в нём ровно n комплексных корней, с учётом их кратности.

7. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами существует набор многочленов с действительными коэффициентами $Q_i(x)$ степени не выше 2 такой, что $P(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot\ldots\cdot Q_n(x)$.