Про стрелочки

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_0 и B_0 соответственно так, что $BC_0 = CB_0$. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков BC и B_0C_0 параллельна биссектрисе угла A.

3. **(a)** Пусть A, B, C, D — произвольные точки плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

(b) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

4. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC.
(a) Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
(b) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $MH = 2OM$.
(c) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, точка H_a — ортоцентр треугольника BCD. Аналогично определим точки H_b, H_c, H_d. Докажите, что отрезки AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.

6. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *10 февраля 2020 г.*

Про стрелочки

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_0 и B_0 соответственно так, что $BC_0 = CB_0$. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков BC и B_0C_0 параллельна биссектрисе угла A.

3. **(a)** Пусть A, B, C, D — произвольные точки плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

(b) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

4. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC.
(a) Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
(b) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $MH = 2OM$.
(c) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, точка H_a — ортоцентр треугольника BCD. Аналогично определим точки H_b, H_c, H_d. Докажите, что отрезки AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.

6. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.