Тренировочный регион

1. Можно ли заполнить квадрат 3×3 числами $1, 2, \ldots, 9$, используя каждое по одному разу, так, чтобы сумма любых двух соседних по стороне чисел являлась простым числом?

2. Существуют ли такие положительные числа a, b, c, x, что

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad (c+x)^2 = (a+x)^2 + (b+x)^2?$$

3. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны, и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n \times n$. При каких n это возможно?

4. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такова, что $a_p + a_q = a_r + a_s$ для всех натуральных p, q, r, s, удовлетворяющих условию $pq = rs$. Докажите, что $a_m \leqslant a_{mn}$ для любых натуральных m и n.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Прямые BE и CF второй раз пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Прямая EF пересекает описанные окружности треугольников CEP и BFQ в точках X и Y, отличных от точек E и F. Докажите, что описанная окружность треугольника XDY касается прямой BC.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *27 января 2020 г.*

Тренировочный регион

1. Можно ли заполнить квадрат 3×3 числами $1, 2, \ldots, 9$, используя каждое по одному разу, так, чтобы сумма любых двух соседних по стороне чисел являлась простым числом?

2. Существуют ли такие положительные числа a, b, c, x, что

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad (c+x)^2 = (a+x)^2 + (b+x)^2?$$

3. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны, и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n \times n$. При каких n это возможно?

4. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такова, что $a_p + a_q = a_r + a_s$ для всех натуральных p, q, r, s, удовлетворяющих условию $pq = rs$. Докажите, что $a_m \leqslant a_{mn}$ для любых натуральных m и n.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Прямые BE и CF второй раз пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Прямая EF пересекает описанные окружности треугольников CEP и BFQ в точках X и Y, отличных от точек E и F. Докажите, что описанная окружность треугольника XDY касается прямой BC.