# Подготовка к региону. Алгебра и ТЧ

**1.** Ненулевые числа $a$ и $b$ таковы, что уравнение $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

**2.** После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени $T$ рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента $T$?

**3.** Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество $A$, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных $a$ и $b$ (не обязательно различных и не обязательно лежащих в $A$) таких, что $a+b$ лежит в $A$, число $ab$ также лежит в $A$. Найдите все полные множества натуральных чисел.

**4.** Найдите все тройки простых чисел $p$, $q$, $r$ такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

**5.** Существует ли треугольник со сторонами $x$, $y$ и $z$ такой, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x)\,?$$

**6.** Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

**7.** Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на $2^{10000}$. Докажите, что число, делящееся на $2^{10000}$, было на одной из карточек уже через день после начала.

**8.** Числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

**[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс]** Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *23 января 2020 г.*

# Подготовка к региону. Алгебра и ТЧ

**1.** Ненулевые числа $a$ и $b$ таковы, что уравнение $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

**2.** После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени $T$ рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента $T$?

**3.** Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество $A$, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных $a$ и $b$ (не обязательно различных и не обязательно лежащих в $A$) таких, что $a+b$ лежит в $A$, число $ab$ также лежит в $A$. Найдите все полные множества натуральных чисел.

**4.** Найдите все тройки простых чисел $p$, $q$, $r$ такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

**5.** Существует ли треугольник со сторонами $x$, $y$ и $z$ такой, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x)\,?$$

**6.** Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

**7.** Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на $2^{10000}$. Докажите, что число, делящееся на $2^{10000}$, было на одной из карточек уже через день после начала.

**8.** Числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$