Разнобой

1. Докажите, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа.

2. В группе каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

3. Существуют ли 2019 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

4. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

5. По кругу расположены n луночек, в одной из которых лежит мина. Питирим и кузнечик играют в следующую игру. В начале игры кузнечик запрыгивает в одну из луночек (Питирим знает, куда именно). Далее за каждый ход Питирим называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а кузнечик прыгает на k луночек по часовой либо против часовой стрелки на свой выбор (при этом Питирим не знает, куда именно кузнечик прыгнул). При каких n Питирим сможет гарантированно взорвать кузнечика? И Питирим, и кузнечик знают расположение мины.

6. Многочлен
$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$$
с неотрицательными коэффициентами имеет n действительных корней. Доказать, что $P(2) \geqslant 3^n$.

7. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным в противном случае. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *16 декабря 2019 г.*

Разнобой

1. Докажите, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа.

2. В группе каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

3. Существуют ли 2019 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

4. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

5. По кругу расположены n луночек, в одной из которых лежит мина. Питирим и кузнечик играют в следующую игру. В начале игры кузнечик запрыгивает в одну из луночек (Питирим знает, куда именно). Далее за каждый ход Питирим называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а кузнечик прыгает на k луночек по часовой либо против часовой стрелки на свой выбор (при этом Питирим не знает, куда именно кузнечик прыгнул). При каких n Питирим сможет гарантированно взорвать кузнечика? И Питирим, и кузнечик знают расположение мины.

6. Многочлен
$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$$
с неотрицательными коэффициентами имеет n действительных корней. Доказать, что $P(2) \geqslant 3^n$.

7. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным в противном случае. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.