Вписанные углы

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ выбрана произвольная точка D. Касательная к описанной окружности треугольника ADC в точке D вторично пересекает описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

2. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника BHC пересекает отрезки AB и AC в точках Y и X соответственно. Докажите, что $XY = 2B_1C_1$.

3. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что четыре полученные точки лежат на одной окружности.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Касательные в точке L к описанной окружности треугольников BLC и BLA пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XBY касаются.

5. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, причём $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй — в точке D. Пусть B — ближайшая к прямой CD точка пересечения окружностей. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E. Докажите, что AD — биссектриса угла CAE.

7. Внутри острого угла XAY взята точка D, а на его сторонах AX и AY — точки B и C соответственно так, что

$$\angle ABC = \angle XBD, \quad \angle ACB = \angle YCD\,.$$

Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой AD.

8. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружнсть. Из произвольной точки P дуги AB опущены перпендикуляры PI, PQ, PR на AB, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019–2020*] группа: 9–2 *12 декабря 2019 г.*

Вписанные углы

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ выбрана произвольная точка D. Касательная к описанной окружности треугольника ADC в точке D вторично пересекает описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

2. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника BHC пересекает отрезки AB и AC в точках Y и X соответственно. Докажите, что $XY = 2B_1C_1$.

3. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что четыре полученные точки лежат на одной окружности.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Касательные в точке L к описанной окружности треугольников BLC и BLA пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XBY касаются.

5. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, причём $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй — в точке D. Пусть B — ближайшая к прямой CD точка пересечения окружностей. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E. Докажите, что AD — биссектриса угла CAE.

7. Внутри острого угла XAY взята точка D, а на его сторонах AX и AY — точки B и C соответственно так, что

$$\angle ABC = \angle XBD, \quad \angle ACB = \angle YCD\,.$$

Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой AD.

8. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружнсть. Из произвольной точки P дуги AB опущены перпендикуляры PI, PQ, PR на AB, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR.