

Геометрический разнбой

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD . M — такая точка диагонали AC , что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM .
2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно так, что

$$BI^2 = BC_1 \cdot BC, \quad CI^2 = CB_1 \cdot CB.$$

Докажите, что точка I лежит на прямой B_1C_1 .

3. На продолжении стороны BC треугольника ABC за вершину B отложен отрезок BB' , равный стороне AB . Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке M . Докажите, что точки A , B' , C и M лежат на одной окружности.
4. Из центров вневписанных окружностей треугольника опущены перпендикуляры на стороны, которых они касаются. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.
5. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I . Прямая, симметричная AB относительно CC_1 , пересекает прямую, симметричную BC относительно AA_1 , в точке X . Докажите, что прямая XI перпендикулярна AC .
6. На прямых, содержащих высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC , выбрали точки, из которых соответствующие стороны видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.
7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P , отличная от A и D . Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P .
8. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD .

Геометрический разнбой

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD . M — такая точка диагонали AC , что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM .
2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно так, что

$$BI^2 = BC_1 \cdot BC, \quad CI^2 = CB_1 \cdot CB.$$

Докажите, что точка I лежит на прямой B_1C_1 .

3. На продолжении стороны BC треугольника ABC за вершину B отложен отрезок BB' , равный стороне AB . Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке M . Докажите, что точки A , B' , C и M лежат на одной окружности.
4. Из центров вневписанных окружностей треугольника опущены перпендикуляры на стороны, которых они касаются. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.
5. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I . Прямая, симметричная AB относительно CC_1 , пересекает прямую, симметричную BC относительно AA_1 , в точке X . Докажите, что прямая XI перпендикулярна AC .
6. На прямых, содержащих высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC , выбрали точки, из которых соответствующие стороны видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.
7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P , отличная от A и D . Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P .
8. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD .