

Дискретная непрерывность

1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?
2. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?
3. Леша начал писать Вите сообщения по поводу занятий. Наконец, после 100-го сообщения Витя сподобился ответить Леше, и между ними завязалась оживленная переписка. В какой-то день после этого Леша был настолько занят, что Вите пришлось отправить 50 сообщений, прежде чем достучаться до него. Докажите, что найдется отрезок времени, в течение которого они отправили друг другу ровно по 30 сообщений.
4. Вершины вписанного 50-угольника делят окружность на 50 дуг, длины которых — $1, 2, 3, \dots, 50$ в некотором порядке. Известно, что каждая пара дуг, соответствующих противоположным сторонам 50-угольника отличается по длине на 25. Докажите, что у 50-угольника найдутся две параллельные стороны.
5. Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.
6. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.
7. Назовем медианой системы $2n$ точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Дана система из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наименьшее количество медиан у нее может быть?