

Индукция в графах

1. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.
2. Несколько человек не знакомы между собой. Докажите, что можно так познакомиться друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых.
3. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.
4. (а) Докажите, что вершины плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединённые ребром, имели разный цвет.
(б) Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.
5. В пространстве расположены $2n$ точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Проведены $n^2 + 1$ отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведённые отрезки образуют не менее n треугольников.
6. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках найдутся хотя бы сто с угловой мерой не более 120° .