

Ориентированные графы

1. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.
2. В некотором государстве 101 город.
 - (а) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
 - (б) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

Определение. Ориентированный граф называется *связным*, если он превращается в связный граф при «стирании» ориентации ребер. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

3. В связном ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.
4.
 - (а) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.
 - (б) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n - 2$ рёбер, причём оценка точная.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

5. В ориентированном графе любые две вершины соединяет ровно одно ребро.
 - (а) Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
 - (б) Докажите, что если этот граф сильно связный, то в нём есть гамильтонов цикл.
6. Несколько команд провели баскетбольный турнир в один круг. Известно, что нет команды, которая бы выиграла или проиграла все матчи. Докажите, что найдутся такие команды A, B, C , что A выиграла у B , B выиграла у C , а C — у A .

Ориентированные графы

1. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.
2. В некотором государстве 101 город.
 - (а) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
 - (б) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

Определение. Ориентированный граф называется *связным*, если он превращается в связный граф при «стирании» ориентации ребер. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

3. В связном ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.
4.
 - (а) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.
 - (б) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n - 2$ рёбер, причём оценка точная.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

5. В ориентированном графе любые две вершины соединяет ровно одно ребро.
 - (а) Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
 - (б) Докажите, что если этот граф сильно связный, то в нём есть гамильтонов цикл.
6. Несколько команд провели баскетбольный турнир в один круг. Известно, что нет команды, которая бы выиграла или проиграла все матчи. Докажите, что найдутся такие команды A, B, C , что A выиграла у B , B выиграла у C , а C — у A .