Процессы

1. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.

2. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2018. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их сумму или разность. После многократного повторения этой операции на доске осталось лишь одно число. Докажите, что это число не может быть нулём.

3. В квадрате 10×10 стоят 100 ненулевых вещественных чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, будет неотрицательной.

4. На хоккейной площадке лежит три шайбы, пронумерованные числами 1, 2, 3. Хоккеист Вася выбирает какую-то из них и бьет по ней так, что она пролетает между двумя другими. Он делает такие удары снова и снова. Может ли так оказаться, что после 2019 ударов каждая шайба лежит на своем первоначальном месте? В момент, когда шайбы не движутся, они не лежат на одной прямой.

5. В каждой из 2019 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

6. Дан выпуклый $2n$-угольник. Внутри него взята точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в вершинах $2n$-угольника.

7. Вокруг воспитательницы по кругу стоят 20 детсадовцев, у каждого некоторое чётное количество пряников. По ее велению каждый детсадовец отдает половину своих пряников соседу справа. Если после этого у кого-то станет нечётное число пряников, то голодная воспитательница отбирает у него один пряник и съедает. Докажите, что в конце концов у всех детей будет одинаковое число пряников.

8. Бесконечная шахматная доска представляет собой четверть плоскости с левым нижним углом. Изначально в угловой клетке лежит фишка. За ход можно убрать фишку из какой-либо клетки X и положить две новые фишки по одной в клетки выше X и правее X. (Ход возможен, только если обе эти клетки свободны). Можно ли за несколько таких операций добиться того, что в левом нижнем квадрате 3×3 нет фишек?

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019-2020*] группа: 9–2 *28 октября 2019 г.*

Процессы

1. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.

2. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2018. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их сумму или разность. После многократного повторения этой операции на доске осталось лишь одно число. Докажите, что это число не может быть нулём.

3. В квадрате 10×10 стоят 100 ненулевых вещественных чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, будет неотрицательной.

4. На хоккейной площадке лежит три шайбы, пронумерованные числами 1, 2, 3. Хоккеист Вася выбирает какую-то из них и бьет по ней так, что она пролетает между двумя другими. Он делает такие удары снова и снова. Может ли так оказаться, что после 2019 ударов каждая шайба лежит на своем первоначальном месте? В момент, когда шайбы не движутся, они не лежат на одной прямой.

5. В каждой из 2019 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

6. Дан выпуклый $2n$-угольник. Внутри него взята точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в вершинах $2n$-угольника.

7. Вокруг воспитательницы по кругу стоят 20 детсадовцев, у каждого некоторое чётное количество пряников. По ее велению каждый детсадовец отдает половину своих пряников соседу справа. Если после этого у кого-то станет нечётное число пряников, то голодная воспитательница отбирает у него один пряник и съедает. Докажите, что в конце концов у всех детей будет одинаковое число пряников.

8. Бесконечная шахматная доска представляет собой четверть плоскости с левым нижним углом. Изначально в угловой клетке лежит фишка. За ход можно убрать фишку из какой-либо клетки X и положить две новые фишки по одной в клетки выше X и правее X. (Ход возможен, только если обе эти клетки свободны). Можно ли за несколько таких операций добиться того, что в левом нижнем квадрате 3×3 нет фишек?