Отрезки касательных

0. *Задача для осознания.* Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках A_1 и A_2 соответственно. Докажите, что

$$BA_1 = CA_2 = p - b$$

(p — полупериметр, $b = AC$).

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Вписанные в треугольники BCD и ACD окружности касаются стороны CD в точках X и Y соответственно. Вписанные в треугольники ABC и ABD окружности касаются стороны AB в точках Z и T соответственно. Докажите, что $XY = ZT$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABD и BCD касаются диагонали BD в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BAC и ACD касаются диагонали AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника.

3. Через вершину A треугольника ABC провели прямую ℓ, не пересекающую внутренность треугольника. Построены две окружности, касающиеся прямой ℓ и продолжений стороны BC: одна из них, кроме этого, касается стороны AB, а вторая — AC. Докажите, что расстояние между точками касания окружностей с прямой ℓ фиксировано при фиксированном треугольнике ABC (т.е. не зависит от прямой ℓ).

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N соответственно. Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

5. Четырёхугольник разрезали диагональю на два треугольника, в каждый из которых вписали по окружности. Оказалось, что окружности касаются друг друга. Докажите, что если четырёхугольник разрезать другой диагональю и снова вписать окружности, то они также будут касаться.

6. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что прямая I_1I_2 перпендикулярна BC.

7. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E, лежащей на боковой стороне BC. Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K, а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N. Докажите, что $BK = MN$.

8. Прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках P и Q. Через точки P и Q проведены лучи, которые разбивают четырёхугольник на четыре четырёхугольника. Оказалось, что два четырёхугольника, примыкающие к противоположным вершинам исходного четырёхугольника, описанные. Докажите, что $ABCD$ является описанным.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019-2020*] группа: 9–2 *17 октября 2019 г.*

Отрезки касательных

0. *Задача для осознания.* Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках A_1 и A_2 соответственно. Докажите, что

$$BA_1 = CA_2 = p - b$$

(p — полупериметр, $b = AC$).

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Вписанные в треугольники BCD и ACD окружности касаются стороны CD в точках X и Y соответственно. Вписанные в треугольники ABC и ABD окружности касаются стороны AB в точках Z и T соответственно. Докажите, что $XY = ZT$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABD и BCD касаются диагонали BD в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BAC и ACD касаются диагонали AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника.

3. Через вершину A треугольника ABC провели прямую ℓ, не пересекающую внутренность треугольника. Построены две окружности, касающиеся прямой ℓ и продолжений стороны BC: одна из них, кроме этого, касается стороны AB, а вторая — AC. Докажите, что расстояние между точками касания окружностей с прямой ℓ фиксировано при фиксированном треугольнике ABC (т.е. не зависит от прямой ℓ).

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N соответственно. Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

5. Четырёхугольник разрезали диагональю на два треугольника, в каждый из которых вписали по окружности. Оказалось, что окружности касаются друг друга. Докажите, что если четырёхугольник разрезать другой диагональю и снова вписать окружности, то они также будут касаться.

6. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что прямая I_1I_2 перпендикулярна BC.

7. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E, лежащей на боковой стороне BC. Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K, а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N. Докажите, что $BK = MN$.

8. Прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках P и Q. Через точки P и Q проведены лучи, которые разбивают четырёхугольник на четыре четырёхугольника. Оказалось, что два четырёхугольника, примыкающие к противоположным вершинам исходного четырёхугольника, описанные. Докажите, что $ABCD$ является описанным.