Отборочная олимпиада на сборы

1. Найти все такие натуральные числа n, для которых

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] \neq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right].$$

Ответ. Все n, дающие остаток 1 при делении на 6.

Решение. Рассмотрим шесть случаев.

- $n = 6k$ для целого k. Тогда

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] \Leftrightarrow 6k + k = 3k + 4k \Leftrightarrow 7k = 7k,$$

что верно.

- $n = 6k + 1$ для целого k. Тогда

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] \Leftrightarrow 6k + 1 + k = 3k + 4k \Leftrightarrow 7k + 1 = 7k,$$

что неверно.

- $n = 6k + 2$ для целого k. Тогда

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] \Leftrightarrow 6k+2+k = 3k+1+4k+1 \Leftrightarrow 7k+2 = 7k+2,$$

что верно.

- $n = 6k + 3$ для целого k. Тогда

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] \Leftrightarrow 6k+3+k = 3k+1+4k+2 \Leftrightarrow 7k+3 = 7k+3,$$

что верно.

- $n = 6k + 4$ для целого k. Тогда

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] \Leftrightarrow 6k+4+k = 3k+2+4k+2 \Leftrightarrow 7k+4 = 7k+4,$$

что верно.

- $n = 6k + 5$ для целого k. Тогда

  $$n+\left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right] \Leftrightarrow 6k+5+k = 3k+2+4k+3 \Leftrightarrow 7k+5 = 7k+5,$$

  что верно.

Таким образом, условие не выполнено только для чисел n, дающих остаток 1 при делении на 6.

2. Пусть a, b и c положительные действительные числа, не превосходящие числа 2. Докажите, что выполнено неравенство

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство в следующем виде:

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{abc}{4} \leqslant \frac{a+b+c}{3}\,.$$

Воспользуемся неравенством средних и тем, что все числа не превосходят 2:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{abc}{4}\,.$$

3. Фигура (n, k)-конь каждым ходом смещается на n позиций по одному из двух направлений и на k по другому. (Обычный шахматный конь есть, таким образом, $(2, 1)$-конь). При данных n и k определите, в какое наименьшее количество цветов можно покрасить клетчатую плоскость так, чтобы каждым своим ходом (n, k)-конь обязательно попадал в клетку другого цвета.

Ответ. В 2 цвета.

Решение. Рассмотрим три случая.

- Пусть числа n и k разной четности. Тогда подойдет шахматная раскраска, и двух цветов хватает.

- Пусть числа n и k оба нечетные. Тогда подойдет раскраска, в которой каждая вертикальная полоса окрашена в один цвет и цвета вертикальных полос чередуются, и двух цветов хватает.

- Пусть теперь числа n и k оба четные. Рассмотрим 2^d — их наибольший общий делитель, являющийся степенью двойки. То есть $k = 2^d \cdot k'$; $n = 2^d \cdot n'$ и хотя бы одно из чисел n' и k' нечетное.

Тогда разобьем плоскость на квадратные блоки $2^d \times 2^d$ клеток и будем красить каждый блок в один из двух цветов. Если числа n' и k' разной четности, то подойдет шахматная раскраска блоков, а если одной четности, то подойдет раскраска, в которой цвета вертикальных полос блоков чередуются. В этом случае также хватит двух цветов.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая BO вторично пересекает описанную окружность в точке D, а продолжение высоты из вершины A, пересекает описанную окружность в точке E. Докажите, что площадь четырёхугольника $BECD$ равна площади треугольника ABC.

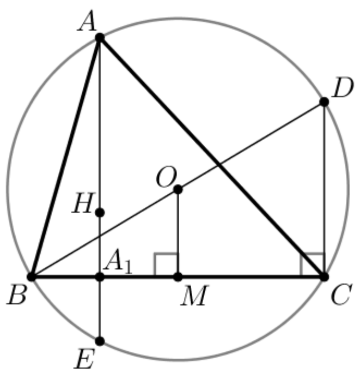

Рис. 1: К задаче 4

Решение. Пусть A_1 — основание высоты, опущенной из вершины A, M — середина стороны BC, H — ортоцентр ABC. Далее будем пользоваться двумя общеизвестными равенствами:

$$HA_1 = A_1E, \quad 2OM = AH.$$

Поскольку BD — диаметр описанной окружности, то $\angle BCD = 90^\circ$, то есть $CD \parallel OM$. Так как O — середина BD, то OM — средняя линия треугольника BCD, поэтому $CD = 2OM = AH$. Тогда

$$S_{BECD} = S_{BEC} + S_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot EA_1 \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot HA_1 \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (HA_1 + AH) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = S_{ABC}.$$

5. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что

$$P(1) = 1,\ P(2) = 8,\ P(3) = 27,\ P(5) = 125,\ P(6) = 216,\ P(7) = 343.$$

Какое наименьшее возможное значение может принимать $|P(4)|$?

Ответ. Наименьшее возможное значение равно 8.

Решение. Исходя из условия, многочлен $P(x) - x^3$ имеет корни 1, 2, 3, 5, 6, 7, то есть

$$P(x) - x^3 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда

$$P(4) = 4^3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot Q(4) = 64 - 36 \cdot Q(4).$$

Несложно видеть, что значение выражения $|64 - 36t|$ при целых t не меньше 8, причём равенство достигается только при $t = 2$. Таким образом, $|P(4)| \geqslant 8$. Равенство достигается, например, при

$$P(x) = x^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7).$$

6. У профессора есть n утверждений A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Он задает своим аспирантам темы диссертационных работ: «Доказать, что из A_i следует A_j». Диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием ранее защищенных работ (то есть, например, если было доказано, что из A_1 следует A_2, из A_2 следует A_3, то нельзя просить доказать, что из A_1 следует A_3). Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора, чтобы ему хватило тем?

Ответ. $n(n+1)/2 - 1$.

Решение. Докажем по индукции по числу утверждений, что максимальное количество аспирантов не больше $n(n+1)/2 - 1$. База для $n = 2$ очевидна. Докажем переход.

Пусть нашлось утверждение A_i, участвующее не более чем в n диссертациях. Тогда удалим это утверждение и все диссертации, его содержащие. Оставшиеся диссертации, доказанные в том же порядке, удовлетворяют условиям задачи, а значит по предположению индукции их не больше $n(n-1)/2 - 1$. Тогда суммарное количество диссертаций не больше $n(n-1)/2 - 1 + n = n(n+1)/2 - 1$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда все утверждения участвуют хотя бы в $n+1$ диссертации. Покажем, что этот случай невозможен. Рассмотрим граф, вершинами которого являются утверждения $A_1, \ldots, A_n$, а ребра соединяют две вершины A_i и A_j тогда и только тогда, когда имеются диссертации $A_i \Rightarrow A_j$ и $A_j \Rightarrow A_i$. Так как каждое утверждение участвует хотя бы в $n+1$ диссертации, то степень каждой вершины в графе хотя бы 2, а значит в графе есть цикл. Пусть это цикл $A_{i_1} \Leftrightarrow A_{i_2} \Leftrightarrow A_{i_3} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_{i_k} \Leftrightarrow A_{i_1}$. Рассмотрим последнюю доказанную диссертацию из этого цикла. Можно считать, что это $A_{i_1} \Rightarrow A_{i_2}$. Но это является следствием уже доказанных диссертаций $A_{i_2} \Rightarrow A_{i_3} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{i_1}$, что противоречит условию.

Теперь построим пример на $n(n+1)/2-1$ диссертаций. Пусть сначала доказываются диссертации $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_1 \Rightarrow A_3$, $\ldots$, $A_1 \Rightarrow A_n$; затем $A_2 \Rightarrow A_3$, $A_2 \Rightarrow A_4$, $\ldots$, $A_2 \Rightarrow A_n$; и так далее, вплоть до диссертации $A_{n-1} \Rightarrow A_n$. (Мы описали $n(n-1)/2$ диссертаций, осталось добавить еще $n-1$). После этого доказываются диссертации $A_n \Rightarrow A_{n-1}, A_{n-1} \Rightarrow A_{n-2}, \ldots, A_2 \Rightarrow A_1$. Пример построен.