Отборочная олимпиада на сборы

1. Найти все такие натуральные числа n, для которых

$$n + \left[\frac{n}{6}\right] \neq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right].$$

2. Пусть a, b и c положительные действительные числа, не превосходящие числа 2. Докажите, что выполнено неравенство

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}.$$

3. Фигура (n, k)-конь каждым ходом смещается на n позиций по одному из двух направлений и на k по другому. (Обычный шахматный конь есть, таким образом, $(2, 1)$-конь). При данных n и k определите, в какое наименьшее количество цветов можно покрасить клетчатую плоскость так, чтобы каждым своим ходом (n, k)-конь обязательно попадал в клетку другого цвета.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая BO вторично пересекает описанную окружность в точке D, а продолжение высоты из вершины A, пересекает описанную окружность в точке E. Докажите, что площадь четырёхугольника $BECD$ равна площади треугольника ABC.

5. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что

$$P(1) = 1,\ P(2) = 8,\ P(3) = 27,\ P(5) = 125,\ P(6) = 216,\ P(7) = 343.$$

Какое наименьшее возможное значение может принимать $|P(4)|$?

6. У профессора есть n утверждений A_1, A_2, …, A_n. Он задает своим аспирантам темы диссертационных работ: «Доказать, что из A_i следует A_j». Диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием ранее защищенных работ (то есть, например, если было доказано, что из A_1 следует A_2, из A_2 следует A_3, то нельзя просить доказать, что из A_1 следует A_3). Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора, чтобы ему хватило тем?