

Неравенства

1. Известно, что a, b, c, d – положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

2. Для произвольных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 докажите неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geq 4\sqrt{2}.$$

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \sqrt{8}xyz.$$

5. Пусть m, n и k – натуральные числа, причём $m > n$. Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}} \quad \text{или} \quad \sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}}$$

(В каждом выражении k знаков квадратного корня, m и n чередуются.)

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + ac + bc.$$

7. Для чисел a, b, c, d из отрезка $[0, 1]$ докажите неравенство

$$(a + b + c + d + 1)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

8. Найдите максимальное значение выражения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2020} - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{2020}x_1,$$

где $x_i \in [0; 1]$ для любого i .

9. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

Неравенства

1. Известно, что a, b, c, d – положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

2. Для произвольных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 докажите неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geq 4\sqrt{2}.$$

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \sqrt{8}xyz.$$

5. Пусть m, n и k – натуральные числа, причём $m > n$. Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}} \quad \text{или} \quad \sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}}$$

(В каждом выражении k знаков квадратного корня, m и n чередуются.)

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + ac + bc.$$

7. Для чисел a, b, c, d из отрезка $[0, 1]$ докажите неравенство

$$(a + b + c + d + 1)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

8. Найдите максимальное значение выражения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2020} - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{2020}x_1,$$

где $x_i \in [0; 1]$ для любого i .

9. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$