Зацикливание и периодичность

0. *Задача для осознания.* На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу. Если в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в нее снова.

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ при всех натуральных $n > 2$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 4.

2. Пусть $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, $0 < m < n$. Докажите, что если $(n, 10) = 1$, то эта дробь – чисто периодическая, причем длина ее минимального периода равна наименьшему натуральному d такому, что $10^d - 1$ кратно n.

3. Последовательность чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (начиная с некоторого места) тогда и только тогда, когда $x_1 \in \mathbb{Q}$.

4. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – чисто периодические последовательности с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?

5. **(a)** В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится (возможно, с предпериодом).
(b) Докажите, что рыцарь также попадет в свой замок, если будет по очереди сворачивать то на самую левую, то на самую правую дорогу.

6. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ определена следующим образом: a_{n+1} больше a_n на последнюю цифру a_n. Докажите, что если a_1 не делится на 5, то эта последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.
(a) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.
(b) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

8. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019-2020*] группа: 9–2 *7 октября 2019 г.*

Зацикливание и периодичность

0. *Задача для осознания.* На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу. Если в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в нее снова.

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ при всех натуральных $n > 2$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 4.

2. Пусть $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, $0 < m < n$. Докажите, что если $(n, 10) = 1$, то эта дробь – чисто периодическая, причем длина ее минимального периода равна наименьшему натуральному d такому, что $10^d - 1$ кратно n.

3. Последовательность чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (начиная с некоторого места) тогда и только тогда, когда $x_1 \in \mathbb{Q}$.

4. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – чисто периодические последовательности с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?

5. **(a)** В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится (возможно, с предпериодом).
(b) Докажите, что рыцарь также попадет в свой замок, если будет по очереди сворачивать то на самую левую, то на самую правую дорогу.

6. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ определена следующим образом: a_{n+1} больше a_n на последнюю цифру a_n. Докажите, что если a_1 не делится на 5, то эта последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.
(a) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.
(b) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

8. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.