[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв

[*2019-2020*] группа: 9–2 *30 сентября 2019 г.*

Ещё про многочлены

1. Докажите, что если многочлены степени n совпадают в $n+1$ точке, то они равны.
2. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.
3. Дан многочлен нечетной степени $P(x)$. Докажите, что у уравнения $P(P(x))=0$ различных действительных корней не меньше, чем у уравнения $P(x)=0$.
4. Квадратные трёхчлены $P(x)=x^2+ax+b$ и $Q(x)=x^2+cx+d$ таковы, что уравнение $P(Q(x))=Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b\neq d$.
5. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества
$$P(P(x))\equiv Q(Q(x)),\quad P(P(P(x)))\equiv Q(Q(Q(x))).$$
Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x)\equiv Q(x)$?
6. Про многочлен $P(x)$ десятой степени известно, что
$$P(1)=P(10),\ P(2)=P(9),\ \ldots,\ P(5)=P(6)\,.$$
Докажите, что график $P(x)$ имеет ось симметрии.
7. Множество из 2019 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что существует конечное число прекрасных множеств.
8. Пусть многочлен $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0\neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв

[*2019-2020*] группа: 9–2 *30 сентября 2019 г.*

Ещё про многочлены

1. Докажите, что если многочлены степени n совпадают в $n+1$ точке, то они равны.
2. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.
3. Дан многочлен нечетной степени $P(x)$. Докажите, что у уравнения $P(P(x))=0$ различных действительных корней не меньше, чем у уравнения $P(x)=0$.
4. Квадратные трёхчлены $P(x)=x^2+ax+b$ и $Q(x)=x^2+cx+d$ таковы, что уравнение $P(Q(x))=Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b\neq d$.
5. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества
$$P(P(x))\equiv Q(Q(x)),\quad P(P(P(x)))\equiv Q(Q(Q(x))).$$
Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x)\equiv Q(x)$?
6. Про многочлен $P(x)$ десятой степени известно, что
$$P(1)=P(10),\ P(2)=P(9),\ \ldots,\ P(5)=P(6)\,.$$
Докажите, что график $P(x)$ имеет ось симметрии.
7. Множество из 2019 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что существует конечное число прекрасных множеств.
8. Пусть многочлен $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0\neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.