

## Теория чисел. Разнобой

1. Сколько существует натуральных чисел  $n$ , меньших 10000, для которых  $2^n - n^2$  делится на 7?
2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3?$$

3. Найдите все такие  $a$ , что значение выражения

$$an(n+2)(n+3)(n+4)$$

будет целым для любого натурального  $n$ .

4. Докажите, что если  $(a, b) = 1$ , то наибольший общий делитель чисел  $a + b$  и  $a^2 + b^2$  равен 1 или 2.
5. Пусть  $n$  — нечетное число, имеющее ровно  $k$  различных простых делителей. Сколько существует решений уравнения  $n^2 + m^2 = l^2$  в натуральных числах со взаимно простыми  $m$  и  $l$ ?
6. Пусть  $p$  — простое число. Докажите, что для натурального  $k < p$  выполнено сравнение  $(p - k)!(k - 1)! \equiv_p (-1)^k$ .
7. Докажите, что для любого простого  $p$  число  $2^{2^p} - 4$  делится на  $2^p - 1$ .
8. Существует ли такое целое  $r$ , что число  $\frac{n!}{2^{n-r}}$  является целым при любом натуральном  $n$ ?
9. Пусть  $p$  и  $q$  — различные простые нечетные числа. Докажите, что число  $\left[ \frac{p^q + q^p}{pq} \right]$  четное.

## Теория чисел. Разнобой

1. Сколько существует натуральных чисел  $n$ , меньших 10000, для которых  $2^n - n^2$  делится на 7?
2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3?$$

3. Найдите все такие  $a$ , что значение выражения

$$an(n+2)(n+3)(n+4)$$

будет целым для любого натурального  $n$ .

4. Докажите, что если  $(a, b) = 1$ , то наибольший общий делитель чисел  $a + b$  и  $a^2 + b^2$  равен 1 или 2.
5. Пусть  $n$  — нечетное число, имеющее ровно  $k$  различных простых делителей. Сколько существует решений уравнения  $n^2 + m^2 = l^2$  в натуральных числах со взаимно простыми  $m$  и  $l$ ?
6. Пусть  $p$  — простое число. Докажите, что для натурального  $k < p$  выполнено сравнение  $(p - k)!(k - 1)! \equiv_p (-1)^k$ .
7. Докажите, что для любого простого  $p$  число  $2^{2^p} - 4$  делится на  $2^p - 1$ .
8. Существует ли такое целое  $r$ , что число  $\frac{n!}{2^{n-r}}$  является целым при любом натуральном  $n$ ?
9. Пусть  $p$  и  $q$  — различные простые нечетные числа. Докажите, что число  $\left[ \frac{p^q + q^p}{pq} \right]$  четное.