Геометрический разнобой

1. Окружности ω и Ω пересекаются в точках A и B, а центр ω лежит на Ω. Касательная к Ω, проведенная в точке A, пересекает ω в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2. К окружности с центром в точке O через точку S проведены касательные SA и SB, а также секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO пересекаются в точке X. Докажите, что точки M, N, O, X лежат на одной окружности.

3. Общие внешние касательные непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 касаются их в точках A и B, C и D соответственно (A и B лежат на одной касательной, C и D — на другой). M — середина AB, отрезки MC и MD второй раз пересекают соответственно ω_1 и ω_2 в точках P и Q. Докажите, что точки A, B, P, Q лежат на одной окружности.

4. Докажите, что отрезок внутренней касательной к двум непересекающимся окружностям, заключённый между двумя внешними касательными, равен по длине внешней касательной.

5. Произвольная прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке K, а описанную окружность — в точке L. Докажите, что центры описанных окружностей всевозможных треугольников BKL лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике оказалось, что центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей центр описанной окружности и ортоцентр. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая A_1I делит пополам высоту, проведённую из вершины A.

8. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне BC выбрана произвольная точка X. Описанные окружности треугольников XCB_1 и XBC_1 повторно пересекаются в точке Y. Докажите, что $\angle AYX = 90^\circ$.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[*2019-2020*] группа: 9–2 *23 сентября 2019 г.*

Геометрический разнобой

1. Окружности ω и Ω пересекаются в точках A и B, а центр ω лежит на Ω. Касательная к Ω, проведенная в точке A, пересекает ω в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2. К окружности с центром в точке O через точку S проведены касательные SA и SB, а также секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO пересекаются в точке X. Докажите, что точки M, N, O, X лежат на одной окружности.

3. Общие внешние касательные непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 касаются их в точках A и B, C и D соответственно (A и B лежат на одной касательной, C и D — на другой). M — середина AB, отрезки MC и MD второй раз пересекают соответственно ω_1 и ω_2 в точках P и Q. Докажите, что точки A, B, P, Q лежат на одной окружности.

4. Докажите, что отрезок внутренней касательной к двум непересекающимся окружностям, заключённый между двумя внешними касательными, равен по длине внешней касательной.

5. Произвольная прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке K, а описанную окружность — в точке L. Докажите, что центры описанных окружностей всевозможных треугольников BKL лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике оказалось, что центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей центр описанной окружности и ортоцентр. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая A_1I делит пополам высоту, проведённую из вершины A.

8. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне BC выбрана произвольная точка X. Описанные окружности треугольников XCB_1 и XBC_1 повторно пересекаются в точке Y. Докажите, что $\angle AYX = 90^\circ$.