Теоремы Безу и Виета

1. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

2. Даны целые числа p и q такие, что многочлен x^3+px+q имеет 3 целых корня. Докажите, что сумма кубов корней делится на 3.

3. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ одинаковый набор целых коэффициентов с, возможно, различным порядком. Докажите, что $P(321)-Q(321)$ делится на 64.

4. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения выражений

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\,,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\,,$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1x_2\ldots x_n$$

являются целыми числами. Докажите, что исходные числа тоже целые.

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси Ox.

6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x))=Q(P(x))$. Докажите, что если $P(n)\neq Q(n)$ при некотором натуральном n, то число $P(P(n))-Q(Q(n))$ делится на $P(n)-Q(n)$.

7. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами. Докажите, что найдётся целое число k такое, что числа

$$P(k),\ P(k+1),\ \ldots, P(k+2019)$$

являются составными.

8. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение b.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Доледенок, Трещёв
[2019-2020] группа: 9–2 *19 сентября 2019 г.*

Теоремы Безу и Виета

1. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

2. Даны целые числа p и q такие, что многочлен x^3+px+q имеет 3 целых корня. Докажите, что сумма кубов корней делится на 3.

3. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ одинаковый набор целых коэффициентов с, возможно, различным порядком. Докажите, что $P(321)-Q(321)$ делится на 64.

4. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения выражений

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\,,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\,,$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1x_2\ldots x_n$$

являются целыми числами. Докажите, что исходные числа тоже целые.

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси Ox.

6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x))=Q(P(x))$. Докажите, что если $P(n)\neq Q(n)$ при некотором натуральном n, то число $P(P(n))-Q(Q(n))$ делится на $P(n)-Q(n)$.

7. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами. Докажите, что найдётся целое число k такое, что числа

$$P(k),\ P(k+1),\ \ldots, P(k+2019)$$

являются составными.

8. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение b.