ЦПМ
Группа 9-1

Инверсия-3
Разбор

Teacher:
Ilya Bogdanov

Moscow 2020

1. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 Докажите, что если окружности, описанные около треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$, проходят через одну точку, то и окружности, описанные около треугольников $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$, проходят через одну точку.

   Решение. Сделаем инверсию в точке пересечения окружностей $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ и $A_2B_2C_1$, и мы получим четыре прямые и четыре окружности, описанные около образованных этими прямыми четырех треугольников треугольников. Эти окружности проходят через одну точку: *точку Микеля* данных четырех прямых.

   Как придумать. Где мы могли бы сделать инверсию? Лучший вариант — конечно, точка пересечения четырех окужностей.

2. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

   Решение. Обозначим окружность около AOB за α, окружность около COS за γ. Рассмотрим симметрую S (относительно прямой), которая переводит углы AOC и COD друг в друга. Такая симметрия есть ровно одна, обозначим ее ось за l.

   Теперь заметим, что существует такая инверсия I с центром в O, что при ее композиции с симметрией S окружности α и γ меняются местами, то есть

$$S(I(\alpha)) = \gamma$$
$$S(I(\gamma)) = \alpha$$

   Действительно, для любых двух окружностей вписанных в один и тот же угол есть ровно одна инверсия с центром в вершине угла, меняющая окружности местами. Возьмем за I инверсию, которая переводит γ в $S(\alpha)$, и она подойдет (убедитесь в этом).

   Итак, окружности поменялись местами. Тогда точки E и F либо поменяются местами, либо обе останутся на месте. Если они остались на месте, то обе лежали на оси симметрии l и, более того, они совпадают. Если точки поменялись местами, то лучи OE и OF симметричны относительно l. В обоих случаях требуемое условие на углы выполнено.

   Как придумать. Центром инверсии выбрать O. На конструкции две окружности, поэтому хорошо бы было их друг в друга перевести. Далее необходимо было придумать симметрию.

   Замечание. Про композицию инверсии и симметрии вас скорее всего в будущем ждет отедельное занятие, данный метод позволяет решать немалое количество замысловатых геометрических задач.

3. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

   Решение. Сделаем инверсию в A с радиусом AH^2. При этой инверсии $B \longleftrightarrow K$ и $C \longleftrightarrow L$, следовательно (окружность ABC) $\longleftrightarrow$ (прямая KL). Значит, P и Q остались на месте и $AP = AQ = AH$. Тем самым, TA биссектриса PTQ. Из предыдущих двух условий следуюет, что H — инцентр PQT, по лемме о трезубце.

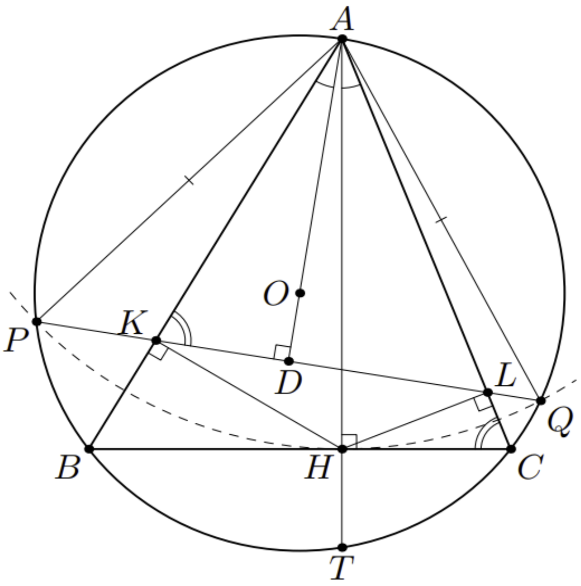

Рис. 1: Задача 3

Как придумать. Соотношение для прямоугольного треугольника $AH^2 = AK \cdot AB$ наталкивает на мысль о соответствующей инверсии.

4. Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям. (*Подсказка: рассмотрите инверсию с центом в точке пересечения касательных к паре окружностей*)

   Решение. Обозначим точку пересечения касательных за X. Проведем окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно нее. Окружности, касающиеся в точке P, перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух прямых, проходящих через центр инверсии. Исходная окружность тоже перейдет в себя, так как ее образ касается тех же двух окружностей и тех же двух прямых-касательных к исходной окружности через центр инверсии. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т.е. касательная из X к исходной окружности равна XP и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т.е искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

   Как придумать. Ранее мы уже не раз встречались с ситуацией, когда инверсия в точке пересечения некоторых касательных была полезна. Такова данная инверсия и в этот раз.

5. **Поризм Штейнера.** Докажите, что если существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой; в противном случае — внешним и внутренним образом), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружно- стей $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

   Решение. Сделаем инверсию, переводящую R_1 и R_2 в пару концентрических окружностей. Тогда окружности S_1' , $S_2' \ldots S_n'$ и T_1' равны между собой. Повернув цепочку

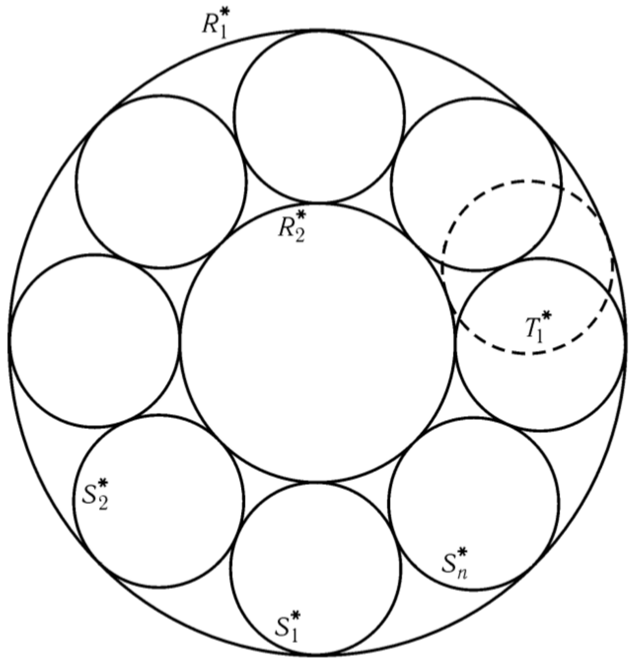

Рис. 2: Задача 5

S_1' , $S_2' \dots S_n'$ вокруг центра окружности R_1' так, чтобы S_1' перешла в T_1', и сделав инверсию ещё раз, получим нужную цепочку T_1' , $T_2' \dots T_n'$.

Как придумать. Вспомнить утверждение о том, что любые две непересекающиеся окружности переводятся инверсией в концентрические.

Замечание. Помимо вышеизложенного простого решения было принято и другое решение от Дениса.

6. Дан треугольник ABC ($BC < AC$). Биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Пусть M — точка пересечения серединного перпендикуляра к AC с внешней биссектрисой угла BCA. Докажите, то середина отрезка BC лежит на описанной окружности треугольника CPM.

   Решение. Пусть R — середина стороны CA. Сделалаем композицию инверсии с центром в C радиусом $\sqrt{\frac{CA \cdot CB}{2}}$ и симметрии относительно биссектрисы CP. Тогда $N \longleftrightarrow A$ и $R \longleftrightarrow B$. Следовательно (окружность ABC) $\longleftrightarrow$ (прямая NR). Точка P перейдет в точку P' пересечения биссектрисы CP и средней лиинии.

   Куда же перейдет точка M? Образ M' есть точка пересечения внешней биссектрисы и образа прямой RM. Что это за образ? Это окружность через центр инверсии C, образ точки R, то есть через B, и более того, эта окружность перпендикулярна образу CA, то есть CB. Значит, образ MR это окружность с центром в N и радиусом $BC/2$. Точка пересечения этой окружности и внешней биссектрисы — перпендикуляр из B на внешнюю биссектрису.

   Все что нам осталось — доказать, что P', M' и $N' = A$ коллинеарны. Это верно, т.к. AM' — медиана треугольника ABD (см. рисунок, объект и его образ образ выделены одинаковыми цветами).

   Как придумать. Догадаться до нужной инверсии + симметрии непросто. Это самая сложная задача данного листка. Тем не менее, задача была решена Степой.

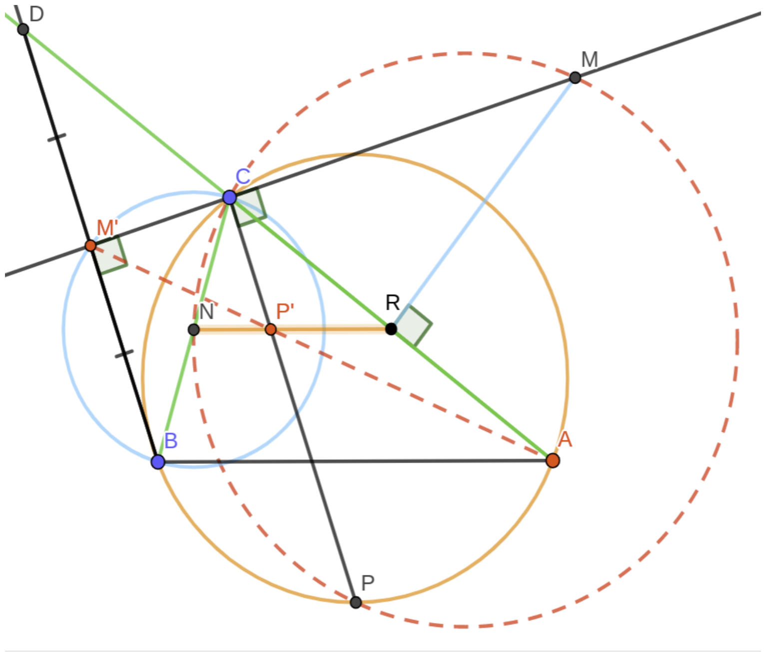

Рис. 3: Задача 6

Замечание. Изучите предложенное мной решение, будет полезно на будущее. Чертеж постарался сделать прозрачным для понимания.

7. **а)** Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 – в точках D_1 и D_2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности или прямой, то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности или прямой.

   б) Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHBKCLDMEN$. Около треугольников AHB, BKC, CLD, DME, ENA описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от A, B, C, D, E, лежат на одной окружности. *Подсказка: возможно, вам поможет точка Микеля.*

Решение. **а)** Сделаем инверсию в точке A_1 и получим следующую картинку для доказательства. Ее мы уже встречали и доказывали нужный факт.

b) Достаточно доказать, что любые четыре из пяти нужных точек лежат на одной окружности. На приведенном чертеже это четыре красные точки. Рассмотрим три синие окружности на картинке. Каждая строится по трем точкам, лежащим на контуре звезды. Остальные их точки пересечения с другими окружностями вне контура звезды обусловлены существованием *точек Микеля*

А теперь заметим, что синие и зеленая окружности образуют конструкцию из пункта **а)**. Тогда из того, что рыжие точки лежат на прямой следует, что красные точки лежат на одной окружности.

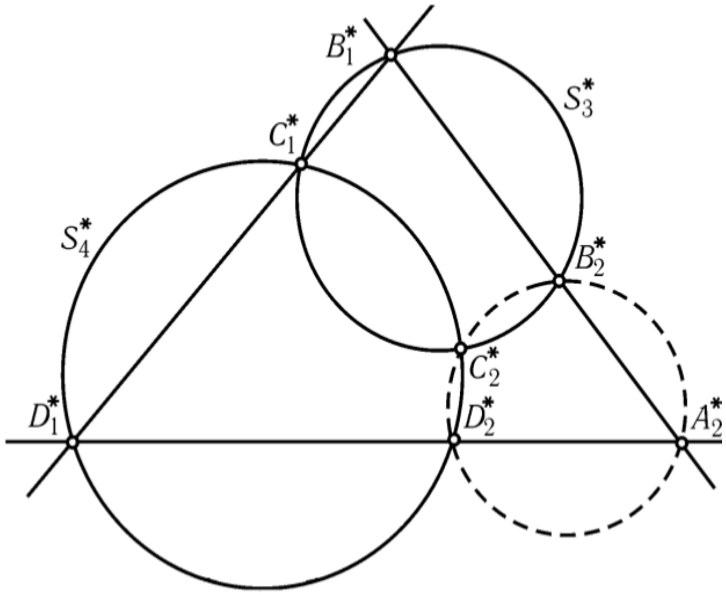

Рис. 4: Задача 7а)

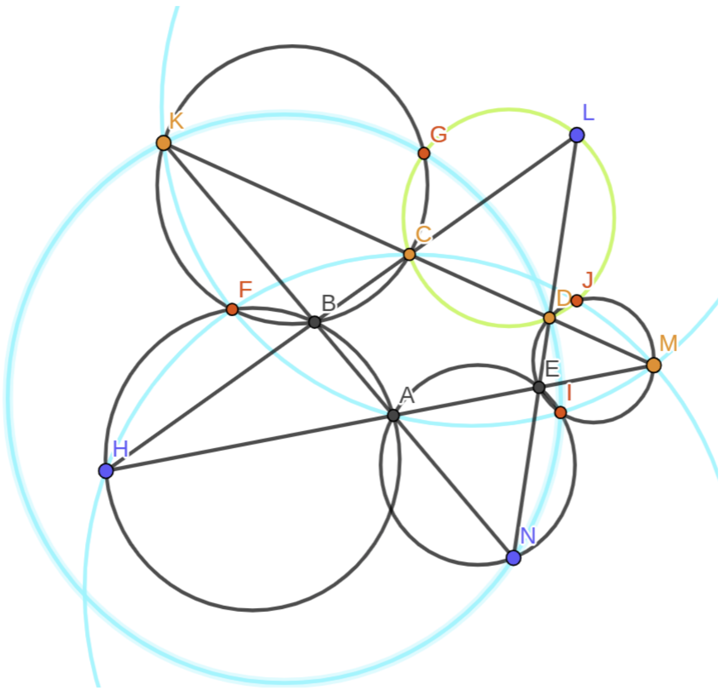

Рис. 5: Задача 7б)